

МЕТРОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЕСТОВЫХ МЕТОДОВ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ НА ОСНОВЕ ОБРАТНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

В.Я. Купер¹, М.Г. Рубцов²

¹Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

²ООО «Научно-производственный центр ПАЛС»
443095, г. Самара, ул. Ташкентская, 196

E-mail: mg.rubtsov@mail.ru

Рассматриваются тестовые методы повышения точности измерений на основе обратных математических моделей измерительного канала, в качестве которых используются интерполяционные полиномы Лагранжа. Анализируются основные составляющие погрешности результата измерений при использовании тестовых методов и обратных интерполяционных моделей, решается задача оптимального выбора параметров тестов.

Ключевые слова: *повышение точности измерений, погрешность измерений, измерительный канал, интерполяционный полином, тестовые методы повышения точности измерений.*

В работе [1] рассмотрены алгоритмические методы повышения точности измерений на основе обратных интерполяционных моделей измерительного канала, показаны их достоинства и перспективность применения как в методах образцовых сигналов, так и в тестовых методах повышения точности. Настоящая работа посвящена метрологическому анализу тестовых методов повышения точности измерений, в которых используются обратные интерполяционные модели, и оптимальному выбору параметров тестов.

Если обратный интерполяционный полином Лагранжа имеет порядок n и используются линейные тесты, то оценка значения измеряемой величины вычисляется по формуле [1]

$$X = \frac{\sum_{j=0}^n L_j(Y_x) \cdot M_j}{1 - \sum_{j=0}^n L_j(Y_x) \cdot K_j}, \quad (1)$$

где X – значение измеряемой величины;

M_j и K_j – постоянные и известные параметры j -го воздействия на входе измерительного канала (теста);

j – номер узла интерполяции;

Y_x – значение выходной величины измерительного канала, соответствующее значению X на его входе;

Виталий Яковлевич Купер (к.т.н., доц.), доцент каф. информационно-измерительной техники.

Михаил Геннадьевич Рубцов (к.т.н.), директор НПЦ.

Y_i, Y_j – значения выходной величины в узлах интерполяции;
 n – порядок интерполяционного полинома;

$$L_j(Y_x) = \frac{\prod_{\substack{i=0; j=0 \\ i \neq j}}^n (Y_x - Y_i)}{\prod_{\substack{i=0; j=0 \\ i \neq j}}^n (Y_j - Y_i)} \text{ – многочлен Лагранжа.}$$

Чаще всего используются линейные тесты: аддитивные и мультипликативные.

Если в j -ом тесте $M_j \neq 0$; $K_j = 1$, то $F_j(X) = X + M_j$. В этом случае на входе формируется аддитивный тест, в котором образцовая «добавка» равна M_j . Если в j -ом тесте $M_j = 0$; $K_j \neq 0$; $K_j \neq 1$, то $F_j(X) = K_j X$. В этом случае на входе формируется мультипликативный тест.

Как показано в работе [1], для полинома порядка n количество тестов равно $n + 1$, причем обязательно должны быть использованы как аддитивные, так и мультипликативные тесты.

Наиболее часто на практике используются интерполяционные полиномы второго порядка ($n=2$). В этом случае число тестов равно 3 и возможно применение двух алгоритмов:

- с двумя аддитивными и одним мультипликативным тестами;
- с одним аддитивным и двумя мультипликативными тестами.

В первом случае формула (1) примет вид

$$X = \frac{L_0(Y_x) \cdot M_0 + L_1(Y_x) \cdot M_1}{1 - [L_0(Y_x) + L_1(Y_x) + L_2(Y_x) \cdot K_2]}, \quad (2)$$

где

$$L_0(Y_x) = \frac{(Y_x - Y_1) \cdot (Y_x - Y_2)}{(Y_0 - Y_1) \cdot (Y_0 - Y_2)};$$

$$L_1(Y_x) = \frac{(Y_x - Y_0) \cdot (Y_x - Y_2)}{(Y_1 - Y_0) \cdot (Y_1 - Y_2)};$$

$$L_2(Y_x) = \frac{(Y_x - Y_0) \cdot (Y_x - Y_1)}{(Y_2 - Y_0) \cdot (Y_2 - Y_1)}.$$

Во втором случае формула (1) примет вид

$$X = \frac{L_0(Y_x) \cdot M_0}{1 - [L_0(Y_x) + L_1(Y_x) \cdot K_1 + L_2(Y_x) \cdot K_2]}. \quad (3)$$

В обоих случаях точность вычисленного по формулам (2) или (3) результата определяется главным образом погрешностями параметров тестов M_j, K_j , случайными погрешностями значений Y_x, Y_0, Y_1, Y_2 и отклонением используемой обратной интерполяционной модели от реальной функции преобразования измерительного канала.

Анализ погрешности из-за неточности формирования тестов. Целесообразно рассмотреть раздельно влияние погрешностей формирования аддитивных и мультипликативных тестов.

Предположим, что величины M_j в аддитивных тестах имеют абсолютные погрешности ΔM_j . Из формулы (1) следует, что вызванная этим абсолютная погрешность ΔX_M определяется формулой

$$\Delta X_M = \frac{\sum_{j=0}^n L_j(Y_x) \cdot \Delta M_j}{1 - \sum_{j=0}^n L_j(Y_x) \cdot K_j}. \quad (4)$$

Соответствующая относительная погрешность δ_{X_M} равна

$$\delta_{X_M} = \frac{\sum_{j=0}^n L_j(Y_x) \cdot \Delta M_j}{\sum_{j=0}^n L_j(Y_x) \cdot M_j}. \quad (5)$$

Допустим, что все величины M_j выполнены с одинаковой точностью, т. е. имеют одинаковую относительную погрешность δ_M . Тогда из формулы (5) получим

$$\delta_{X_M} = \delta_M.$$

Таким образом, если все используемые аддитивные «добавки» M_j выполнены с одинаковой относительной погрешностью, то соответствующая относительная погрешность результата измерений ей равна независимо от количества аддитивных тестов.

Рассмотрим влияние погрешности формирования мультипликативных тестов. Предположим, что величины K_j в мультипликативных тестах имеют абсолютные погрешности ΔK_j . Из формулы (1) следует, что вызванная этим абсолютная погрешность ΔX_K определяется формулой

$$\Delta X_K = \frac{\sum_{j=0}^n L_j(Y_x) \cdot M_j \cdot \sum_{j=0}^n L_j(Y_x) \cdot \Delta K_j}{[1 - \sum_{j=0}^n L_j(Y_x) \cdot K_j]^2}.$$

Соответствующая относительная погрешность δ_{X_K} равна

$$\delta_{X_K} = \frac{\sum_{j=0}^n L_j(Y_x) \cdot K_j \cdot \delta_{K_j}}{1 - \sum_{j=0}^n L_j(Y_x) \cdot K_j}, \quad (6)$$

где δ_{K_j} – относительная погрешность величины K_j .

В качестве примера рассмотрим модель второго порядка и алгоритм измерений, в котором используются два аддитивных и один мультипликативный тесты, т. е.

$n = 2$; $K_0 = 1$; $K_1 = 1$; $K_2 \neq 1$; $K_2 \neq 0$; $\delta_{K_0} = 0$; $\delta_{K_1} = 0$; $\delta_{K_2} \neq 0$. Тогда из формулы (6) получим

$$\delta_{X_K} = \delta_{K_2} \cdot \frac{K_2}{1 - K_2}.$$

Очевидно, что погрешность δ_{K_j} зависит не только от погрешности формирования мультипликативного теста, но и от значения K_2 , причем погрешность δ_{K_j} тем меньше, чем больше K_2 отличается от 1.

Анализ погрешности из-за отличия интерполяционной модели от реальной функции преобразования средства измерений. Из теории интерполирования функций известно [2], что при использовании интерполяционной формулы Лагранжа абсолютная величина погрешности интерполяции для обратной интерполяционной модели не превышает значения

$$\Delta X_{инт} \leq \frac{\max |f^{(n+1)}(Y)|}{(n+1)!} \cdot \left| \prod_{n+1}(Y) \right|,$$

где $\Delta X_{инт}$ – абсолютная величина погрешности интерполяции;

n – порядок интерполяционного полинома;

$f^{(n+1)}(Y)$ – производная $(n+1)$ -го порядка обратной функции преобразования средства измерений;

$$\prod_{n+1}(Y) = (Y - Y_0) \cdot (Y - Y_1) \cdot \dots \cdot (Y - Y_n). \quad (7)$$

При использовании метода образцовых сигналов Y_0, Y_1, \dots, Y_n – значения Y в узлах интерполяции, задаваемых образцовыми мерами. В тестовых методах фиксированные узлы интерполяции отсутствуют. На вход средства измерений поочередно подаются измеряемая величина и тесты, которые являются функциями измеряемой величины. В связи с этим вместо фиксированных узлов интерполяции здесь можно рассматривать подвижные (при изменении измеряемой величины) опорные точки, соответствующие подаваемым на вход тестам.

В случае полинома порядка n на вход средства измерений поочередно подаются измеряемая величина и $(n+1)$ тестов. Поскольку необходимо использовать тесты разного типа (аддитивные и мультипликативные), для определенности допустим, что применены n аддитивных тестов и один мультипликативный. Таким образом, выполняются $(n+2)$ измерений при подаче на вход величин $X, X + M_0, X + M_1, \dots, X + M_n, K_{n+1} \cdot X$. Из этих величин необходимо выбрать $(n+1)$ опорную и одну в качестве текущей переменной, которая при изменении X должна изменять свое отклонение относительно всех опорных точек. Единственная входная величина из перечисленных выше, удовлетворяющая этому требованию, – мультипликативный тест $K_{n+1} \cdot X$, которому соответствует выходная величина Y_{n+1} . При этом формула (7) принимает вид

$$\prod_{n+1}(Y) = (Y_{n+1} - Y_x) \cdot (Y_{n+1} - Y_0) \cdot \dots \cdot (Y_{n+1} - Y_n).$$

Поскольку $K_{n+1} \cdot X - X \neq 0$, то $Y_{n+1} - Y_x \neq 0$. Следовательно, погрешность интерполяции равна нулю в том случае, когда $Y_{n+1} = Y_j$ ($j=0; 1; \dots; n$), т. е. при $K_{n+1} \cdot X = X + M_j$. Таким образом, указанная погрешность равна нулю в $(n+1)$ точках $X = M_j / (K_{n+1} - 1)$. При других значениях X погрешность интерполяции отлична от нуля, а ее зависимость от X имеет n экстремумов.

В качестве примера рассмотрим алгоритм измерений, соответствующий формуле (2), в котором при $n=2$ используются два аддитивных и один мультипликативный тесты. В этом случае погрешность интерполяции определяется формулой

$$\Delta X_{инт} \leq \frac{\max |f^{(3)}(Y)|}{6} \cdot |(Y_2 - Y_x) \cdot (Y_2 - Y_0) \cdot (Y_2 - Y_1)|.$$

Учитывая монотонность реальной функции преобразования средств измерений, можно считать, что при использовании модели второго порядка действительная обратная функция преобразования удовлетворительно описывается степенным полиномом 3-го порядка

$$x = a_0 + a_1 \cdot Y + a_2 \cdot Y^2 + a_3 \cdot Y^3.$$

Тогда

$$\max |f^{(3)}(Y)| = 6 \cdot |a_3|, \text{ а } \Delta X_{инт} \leq |a_3| \cdot |(Y_2 - Y_x) \cdot (Y_2 - Y_0) \cdot (Y_2 - Y_1)|. \quad (8)$$

Допустим, что $S = \Delta Y / \Delta X$ – чувствительность средства измерений и она существенно не изменяется на интервале, которому принадлежат значения $X, X + M_0, X + M_1, \dots, X + M_n, K_{n+1} \cdot X$. Тогда можно записать следующие равенства: $Y_2 - Y_x = S \cdot (K_2 - 1) \cdot X$; $Y_2 - Y_0 = S \cdot [(K_2 - 1) - M_0]$; $Y_2 - Y_1 = S \cdot [(K_2 - 1) - M_1]$.

При этом формула (8) примет вид

$$\Delta X_{инт} \leq |a_3| \cdot S^3 \cdot |(K_2 - 1) \cdot X \cdot [(K_2 - 1) \cdot X - M_0] \cdot [(K_2 - 1) \cdot X - M_1]|.$$

Отсюда следует, что погрешность $\Delta X_{инт} = 0$ при $X = 0$, $X = M_0 / (K_2 - 1)$ и $X = M_1 / (K_2 - 1)$.

Пусть измеряемая величина изменяется в диапазоне $[0; X_{\max}]$. Тогда приведенная погрешность интерполяции не превышает величины

$$\gamma_{инт} = \Delta X_{инт} / X_{\max} \leq |a_3| \cdot S \cdot |F(\beta, \alpha_0, \alpha_1, K_2)|,$$

где $\beta = X / X_{\max}$ – безразмерная измеряемая величина;

$\alpha_0 = M_0 / X_{\max}$, $\alpha_1 = M_1 / X_{\max}$ – безразмерные аддитивные «добавки» в аддитивных тестах;

$$F(\beta, \alpha_0, \alpha_1, K_2) = (K_2 - 1) \cdot \beta \cdot [(K_2 - 1) \cdot \beta - \alpha_0] \cdot [(K_2 - 1) \cdot \beta - \alpha_1]. \quad (9)$$

Для оценки погрешности интерполяции во всем диапазоне измерений необходимо проанализировать функцию (9). Эта функция равна нулю в точках $\beta = 0$; $\beta = \alpha_0 / (K_2 - 1)$; $\beta = \alpha_1 / (K_2 - 1)$ и имеет два экстремума (максимума) в точках

$$\beta_{\circ} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{3 \cdot (K_2 - 1)} \cdot [1 \pm \sqrt{1 - \frac{3 \cdot \alpha_0 \cdot \alpha_1}{(\alpha_0 + \alpha_1)^2}}].$$

Значения функции (9) в точках экстремума одинаковы по модулю и противоположны по знаку.

Значение параметров a_3 и S определяется экспериментально путем проведения активного регрессионного эксперимента и построения обратной модели в виде степенного полинома 3-го порядка.

Анализ случайной погрешности. Случайная погрешность проявляет себя в случайных отклонениях получаемых значений выходной величины $Y_x, Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ от значений, соответствующих градуировочной характеристике средства измерений. Предположим, что эти отклонения $\Delta Y_x, \Delta Y_0, \Delta Y_1, \dots, \Delta Y_n$ аддитивны, независимы и имеют одинаковую дисперсию σ_Y^2 . Эти случайные отклонения через функцию (1) трансформируются в случайную погрешность вычисленного результата измерений.

Для анализа этой погрешности целесообразно погрешности ΔY привести ко входу средства измерений с помощью формулы

$$\Delta X = \Delta Y / S,$$

где ΔX – погрешность, приведенная ко входу средства измерений;

ΔY – погрешность на выходе средства измерений;

S – чувствительность средства измерений в данной точке диапазона измерений.

При анализе случайной погрешности можно пренебречь погрешностью нелинейности функции преобразования, т. е. можно считать, что $S = const$. Тогда дисперсия случайной погрешности, приведенной ко входу средства измерений, равна $\sigma_{ex}^2 = \sigma_Y^2 / S^2$.

Случайную погрешность, приведенную ко входу, можно рассматривать как эквивалентное изменение входной величины в соответствующем измерении. При подаче на вход средства измерений величины X случайная погрешность, приведенная ко входу, равна $\Delta X_{ex} = Y_x / S$. Если ко входу подключаются аддитивные тесты $X + M_j$, то приведенная ко входу погрешность $\Delta Y_j / S$ может рассматриваться как эквивалентное изменение ΔM_j аддитивной «добавки» M_j . Мультипликативные тесты $K_j \cdot X$ можно условно считать комбинированными тестами $(K_j \cdot X + M_j)$ с номинальным значением $M_j = 0$, а приведенную ко входу случайную погрешность считать равной ΔM_j . Таким образом, случайные отклонения $\Delta Y_x, \Delta Y_0, \Delta Y_1, \dots, \Delta Y_n$ соответствуют эквивалентным отклонениям $\Delta X_{ex}, \Delta M_0, \Delta M_1, \dots, \Delta M_n$ входных величин X, M_0, M_1, \dots, M_n .

В соответствии с формулой (4) эти отклонения входных величин приводят к погрешности вычисленного значения измеряемой величины:

$$\Delta X = \Delta X_{ex} + \frac{\sum_{j=0}^n L_j(Y_x) \cdot \Delta M_j}{1 - \sum_{j=0}^n L_j(Y_x) \cdot K_j}.$$

Отсюда следует, что дисперсия случайной погрешности вычисленного результата измерений равна

$$\sigma_x^2 = \sigma_{ax}^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{\sum_{j=0}^n L_j^2(Y_x)}{[1 - \sum_{j=0}^n L_j(Y_x) \cdot K_j]^2} \right\}.$$

Отношение $\lambda = \frac{\sigma_x}{\sigma_{ax}} = \sqrt{1 + \frac{\sum_{j=0}^n L_j^2(Y_x)}{[1 - \sum_{j=0}^n L_j(Y_x) \cdot K_j]^2}}$ (10)

характеризует степень усиления случайной погрешности в результате применения алгоритма повышения точности. Очевидно, что $\lambda \geq 1$.

Для модели 2-го порядка ($n = 2$) формула (10) принимает вид

$$\lambda = \sqrt{1 + \frac{\left[\frac{(Y_x - Y_1) \cdot (Y_x - Y_2)}{(Y_0 - Y_1) \cdot (Y_0 - Y_2)} \right]^2 + \left[\frac{(Y_x - Y_0) \cdot (Y_x - Y_2)}{(Y_1 - Y_0) \cdot (Y_1 - Y_2)} \right]^2 + \left[\frac{(Y_x - Y_0) \cdot (Y_x - Y_1)}{(Y_2 - Y_0) \cdot (Y_2 - Y_1)} \right]^2}{\left[1 - \frac{(Y_x - Y_1) \cdot (Y_x - Y_2)}{(Y_0 - Y_1) \cdot (Y_0 - Y_2)} - \frac{(Y_x - Y_0) \cdot (Y_x - Y_2)}{(Y_1 - Y_0) \cdot (Y_1 - Y_2)} - \frac{(Y_x - Y_0) \cdot (Y_x - Y_1)}{(Y_2 - Y_0) \cdot (Y_2 - Y_1)} \cdot K_2 \right]^2}}}. \quad (11)$$

При анализе случайной погрешности для упрощения формулы (11) можно пренебречь нелинейностью функции преобразования средства измерений. Тогда формула (11) примет вид

$$\lambda = \sqrt{1 + \frac{\beta^2 \alpha_1^2 (K_2 - 1)^2 [\beta (K_2 - 1) - \alpha_1]^2 + \beta^2 \alpha_0^2 (K_2 - 1)^2 [\beta (K_2 - 1) - \alpha_0]^2 + \alpha_0^2 \alpha_1^2 (\alpha_1 - \alpha_0)^2}{\alpha_0^2 \alpha_1^2 (\alpha_1 - \alpha_0)^2 (K_2 - 1)^2}}}. \quad (12)$$

Из формулы (12) следует, что степень усиления случайной погрешности λ может достигать бесконечно больших значений при $\alpha_0 = 0$, или $\alpha_1 = 0$, или $\alpha_1 = \alpha_0$, или $K_2 = 1$. Все эти ситуации соответствуют превращению трех тестов в два, что, естественно, не позволяет решить задачу измерений для полинома второго порядка. Отсюда следует, что для уменьшения λ необходимо увеличивать значения α_0 , α_1 , а также модули разностей $|\alpha_1 - \alpha_0|$ и $|K_2 - 1|$. При этом происходит расширение диапазона изменения величины на входе средства измерений. Для оптимального выбора параметров тестов следует задаться допустимым расширением диапазона изменения входной величины.

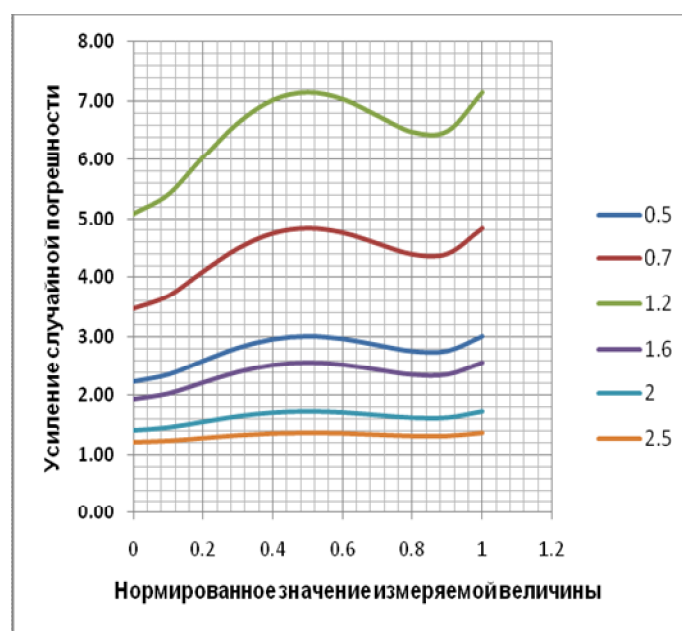
Пусть $0 \leq X \leq X_{\max}$, а допустимый диапазон с учетом тестов составит $[0; X_{\text{don}}]$, причем $X_{\text{don}} > X_{\max}$. Отношение $X_{\text{don}} / X_{\max} = \mu$ – коэффициент расширения входного диапазона. При заданном значении μ оптимальные параметры тестов, обеспечивающие минимум случайной погрешности, определяются формулами $\alpha_0 = (\mu - 1) / 2$; $\alpha_1 = \mu - 1$; $K_2 = \mu$.

При заданном значении μ и оптимальном выборе параметров тестов формула (12) принимает вид

$$\lambda = \sqrt{1 + \frac{\beta^2 [16(\beta - 1)^2 + (2\beta - 1)^2] + 1}{(\mu - 1)^2}}. \quad (13)$$

Анализ функции (13) показывает, что она имеет минимум, равный $\lambda(0) = \sqrt{1 + 1/(\mu - 1)^2}$ в точке $\beta = 0$, два одинаковых максимума, равных $\lambda(0,5) = \lambda(1) = \sqrt{1 + 2/(\mu - 1)^2}$ в точках $\beta = 0,5$ и $\beta = 1$, а также минимум, равный $\lambda(0,85) = \sqrt{1 + 1,614/(\mu - 1)^2}$ в точке $\beta = 0,85$.

Так, например, при выборе $\mu = 2$ значения λ в точках экстремума равны: $\lambda(0) = \sqrt{2}$; $\lambda(0,5) = \lambda(1) = \sqrt{3}$; $\lambda(0,85) = \sqrt{2,614}$. Зависимости степени усиления λ случайной погрешности от нормированного значения измеряемой величины β при различных значениях коэффициента расширения входного диапазона μ приведены на рисунке.



Степень усиления случайной погрешности

Из рисунка видно, что случайная погрешность результата измерений уменьшается при увеличении величины $|\mu - 1|$, причем целесообразно выбирать значение μ , близкое к 2. При $\mu = 2$ степень усиления случайной погрешности не превышает $\sqrt{3}$ во всем диапазоне изменения измеряемой величины. Оценка величины σ_{ex} должна быть получена экспериментально.

Таким образом, выполненный метрологический анализ тестовых методов на основе обратных интерполяционных моделей позволяет оптимизировать параметры

тестовых воздействий, а также оценить основные составляющие результирующей погрешности измерений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Купер В.Я.* Алгоритмические методы повышения точности измерений на основе обратных интерполяционных моделей / В.Я. Купер, М.Г. Рубцов // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Технические науки. – 2010. – № 7(28). – С. 67-73.
2. *Куликовский К.Л., Купер В.Я.* Методы и средства измерений: Учеб. пособие для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 448 с.

Статья поступила в редакцию 30 января 2012 г.

THE METROLOGICAL ANALYSIS OF TEST METHODS OF RAISE OF ACCURACY MEASUREMENTS ON THE BASIS OF RETURN INTERPOLATIONAL MODELS

V.Ya. Kuper¹, M.G. Rubtsov²

Samara State Technical Universitet
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

Scientific@Production Center PALS
196, Tashkentskaya st., Samara, 443095

In paper test methods of raise of accuracy of measurements on the basis of return mathematical models of a measuring channel are observed, in the capacity of which interpolational polynomials of Lagranzh are used. The basic making errors of result of measurements are analysed at use of test methods and return interpolational models, the problem of optimum sampling of parametres of tests is solved.

Keywords: *raise of accuracy of measurements, error of measurements, a measuring channel, an interpolational polynomial, test methods of raise of accuracy of measurements.*

*Vitali Ya. Kuper (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.
Michael G. Rubtsov (Ph.D. (Techn.)), director.*