

## СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРИ ИНДУКЦИОННОМ НАГРЕВЕ

*Г.Н. Рогачев, Д.Н. Тимченко*

Самарский государственный технический университет  
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: dentimchenko@gmail.com

*Рассматривается синтез кусочно-постоянного пространственного управления мощностью внутреннего тепловыделения в теплотехнически тонком теле. Целью управления является стабилизация температурного поля при наличии постоянных тепловых потерь с торца тела. Искомыми величинами являются количество интервалов постоянства, длины интервалов и уровни управляющего воздействия на каждом из интервалов. Эти величины были найдены симплекс-методом для интегрального среднеквадратичного критерия и минимаксного критерия.*

**Ключевые слова:** оптимальный синтез, индукционный нагрев, стабилизация температурного поля, пространственное управление.

Большинство работ по индукционному нагреву металлов посвящено нагреву материала до заданной температуры с одновременной минимизацией одного из критериев (точности, быстродействия, энергозатрат). Однако существуют и такие технологические процессы, в которых требуется поддержание стационарного температурного поля в течение достаточно длительного времени. Например, при отжиге сплавов, нормализации швов при сварке и других операциях необходимо обеспечить минимальный градиент температуры в объекте во время процесса гомогенизации аустенита. При пайке также необходимо поддерживать определенную температуру в течение продолжительного времени, чтобы гарантировать надежное соединение деталей друг с другом.

В этом случае встает вопрос стабилизации температурного поля на заданном уровне  $T_s(x)$ , что при индукционном способе нагрева реализуется посредством управления мощностью внутреннего тепловыделения. Реальные технологии всегда связаны с существованием определенных допусков на отклонение температурного поля от требуемого. Формализацией этого факта является задание некоторой допустимой погрешности отклонения от  $T_s(x)$ . Наибольшее распространение на практике получила среднеквадратичная оценка такой погрешности, которая при допустимой ее величине, равной  $\beta$ , имеет вид

$$\sqrt{\int_0^x (T(x, t) - T_s(x))^2 dx} \leq \beta. \quad (1)$$

Однако достижение даже весьма малых значений  $\beta$  не гарантирует выполнения технологических требований, которые обычно формулируются в виде допустимого максимума абсолютного отклонения конечной температуры от заданной во всем нагреваемом теле, поскольку минимизация (1) не исключает локальных «выбросов»

---

*Геннадий Николаевич Рогачев (к.т.н., доцент), доцент кафедры «Автоматика и управление в технических системах».*

*Денис Николаевич Тимченко, студент.*

температуры в отдельных точках. Этим требованиям прямо отвечает другой способ оценки допустимой погрешности отклонения температурного поля по величине  $\varepsilon$  ошибки равномерного приближения к заданному температурному состоянию [1]:

$$\max_{x \in [0; X]} |T(x, t) - T_s(x)| \leq \varepsilon. \quad (2)$$

Распределение температур в  $T(x, t)$  в зависимости от пространственной координаты  $x \in [0, X]$  и времени  $t$  при нагреве внутренними источниками тепла с объемной плотностью  $u(x, t)$  мощности тепловыделения описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + u(x, t), \quad (3)$$

где  $T$  – температура,  $a$  – коэффициент температуропроводности [1, 2].

Уравнением (3) описываются нестационарные температурные поля. В статье рассматривается вопрос стабилизации температуры по длине тела, что дает возможность считать температурное поле стационарным. Из этого следует, что температура является функцией лишь координаты, а выражение (3) принимает следующий вид:

$$a \frac{d^2 T(x)}{dx^2} = -u(x), \quad (4)$$

где  $u(x)$  – пространственное управление мощностью внутреннего тепловыделения.

Тепловые потери на границах тела описываются законом Фурье, определяющим тепловой поток:

$$\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = -q(t), \quad (5)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности и  $q(t)$  – тепловой поток. Так как температурное поле стационарно, то тепловой поток является постоянным. Тогда получим граничные условия второго рода:

$$\begin{cases} dT/dx|_{x=0} = -q(0)/\lambda; \\ dT/dx|_{x=X} = -q(X)/\lambda. \end{cases} \quad (6)$$

Оценки погрешности (1), (2) могут быть использованы в качестве критериев оптимальности:

$$I_1 = \int_0^X (T(x) - T_s)^2 dx \rightarrow \min, \quad (7)$$

$$I_2 = \max_{x \in [0; X]} |T(x) - T_s| \rightarrow \min. \quad (8)$$

Задача состоит в нахождении такого оптимального пространственного управляющего воздействия  $u(x)$ , которое обеспечивает для объекта (4), (6) минимально возможное значение критерия оптимальности (7) или (8). Наиболее технологически приемлемым способом реализации пространственного управляющего воздействия  $u(x)$  является секционирование индуктора. В настоящее время существуют многосекционные индукционные установки, в которых каждая секция может управляться независимо от остальных. Очевидно, что этот вариант позволяет реализовать кусочно-постоянную функцию  $u(x)$  распределения мощности по длине тела. Искомыми

величинами в этом случае будут являться: количество интервалов постоянства функции  $u(x)$ , длины интервалов и уровни управляющего воздействия на каждом из интервалов. Далее (по аналогии с временным) управление будем называть  $n$ -интервальным при  $n$  интервалах постоянства управляющего воздействия. Эта задача оптимального управления успешно решается с помощью симплекс-метода, реализованного в среде MATLAB [3, 4].

Ограничимся рассмотрением симметричного случая, то есть одно граничное условие (6) станет равным нулю. Краевая задача (4), (6) решалась в системе MATLAB решателем `bvp4c`. В нем используется метод коллокации, так как найти аналитическое решение краевой задачи бывает достаточно сложно. Суть данного метода заключается в нахождении такого приближенного решения, которое бы удовлетворяло уравнению в некоторых заданных точках. При этом вычисляется и ошибка решения, и при слишком большой ее величине задача повторно решается для других точек. Более подробно данный решатель описан в [5].

Простейший вариант управления – одноинтервальное. Параметр оптимизации – мощность тепловыделения. Для этого случая при  $T_3(x)=1000$  °C были получены результаты, представленные на рис. 1, 2.  $T_1(x)$  и  $u_1(x)$  получены при использовании критерия оптимальности (7),  $T_2(x)$  и  $u_2(x)$  – критерия (8). Рассчитанные значения критериев  $I_1=747$  и  $I_2=90$ . Можно сделать вывод, что одноинтервальное управление обеспечивает недостаточную точность, так как отклонение от заданной температуры на концах тела достигает 9 %.

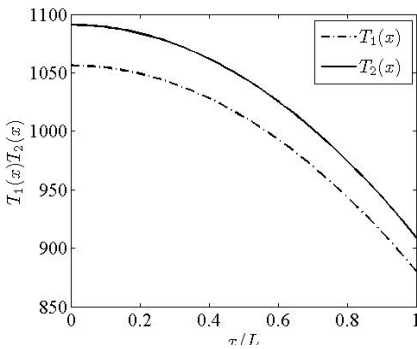


Рис. 1. Графики функций  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  при одном интервале управления

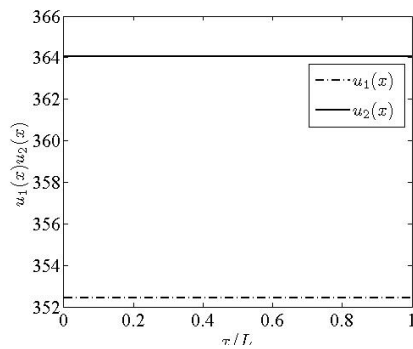


Рис. 2. Графики функций  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  при одном интервале управления

Далее был рассмотрен случай многоинтервального управления, реализуемого в многосекционном индукторе. Сначала исследовался вариант, при котором возможен выбор лишь величины управления каждой из секций индуктора, секции имеют одинаковую длину. Для двухинтервального случая результаты представлены на рис. 3, 4. Обеспечение полученного на первом интервале отрицательного управления с учетом неидеальности теплоизоляции по длине тела считается технически возможным. Полученные значения критериев:  $I_1=168$  и  $I_2=32$ . Таким образом, при увеличении количества интервалов управления до 2 точность увеличилась примерно в 3 раза. Для 3-интервального случая результаты представлены на рис. 5, 6. Полученные значения критериев:  $I_1=91$  и  $I_2=25$ . На рис. 7, 8 представлены графики для случая с пятью равными секциями индуктора. Полученные значения критериев:  $I_1=43$  и  $I_2=13$ . Из приведенных результатов видно, что при увеличении количества интервалов точность повышается. Но при этом увеличивается предельное значение величины управления, что повышает требования к реализующему процесс оборудованию.

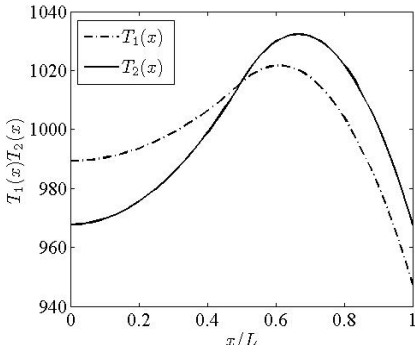


Рис. 3. Графики функций  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  при двух равных интервалах управления

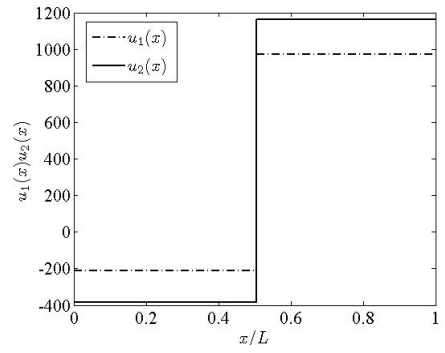


Рис. 4. Графики функций  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  при двух равных интервалах управления

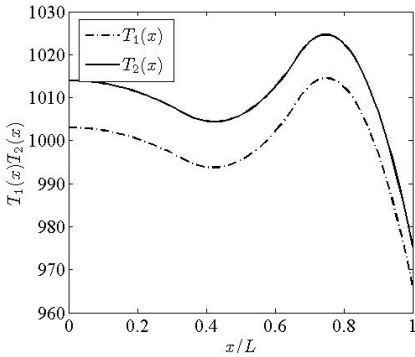


Рис. 5. Графики функций  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  при трех равных интервалах управления

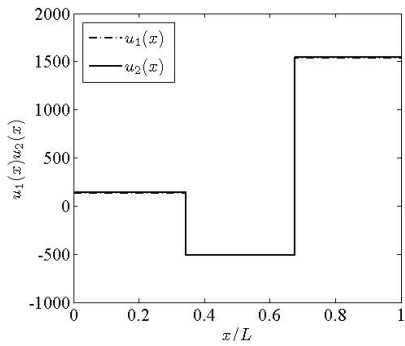


Рис. 6. Графики функций  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  при трех равных интервалах управления

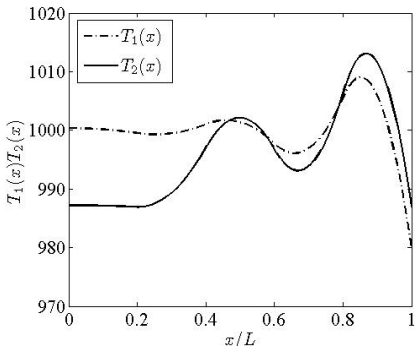


Рис. 7. Графики функций  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  при пяти равных интервалах управления

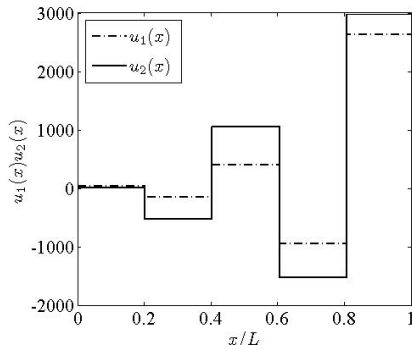


Рис. 8. Графики функций  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  при пяти равных интервалах управления

Рассмотрим далее вариант, при котором определяются не только величина мощности, но и длина каждого из интервалов (длина каждой секции индуктора). На рис. 9, 10 представлены результаты для двухсекционного индуктора. Полученные минимальные значения критериев:  $I_1=180$  и  $I_2=33$ . Для двухинтервального случая, судя по значениям критериев, введение второй степени свободы не дает заметного выигрыша. На рис. 11, 12 изображены результаты для варианта с трехсекционным

индуктором. Полученные значения критериев:  $I_1=73$  и  $I_2=14$ . В данном случае выигрыш от использования двух степеней свободы существенен.

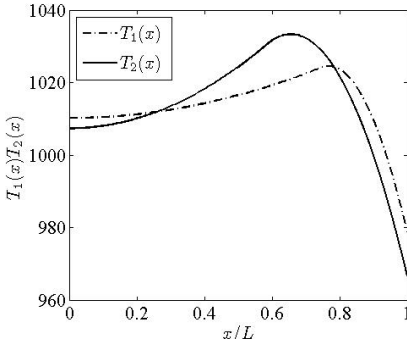


Рис. 9. Графики функций  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  при двух неравных интервалах управления

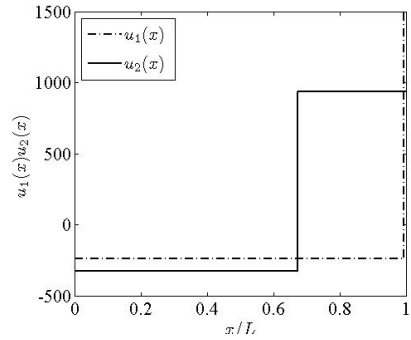


Рис. 10. Графики функций  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  при двух неравных интервалах управления

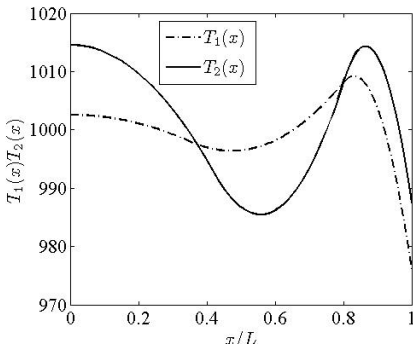


Рис. 11. Графики функций  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  при трех неравных интервалах управления

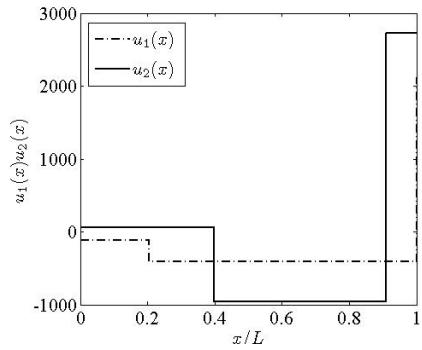


Рис. 12. Графики функций  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  при трех неравных интервалах управления

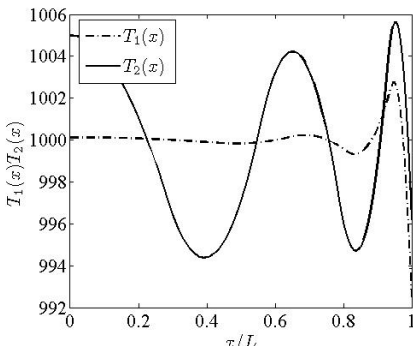


Рис. 13. Графики функций  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  при пяти неравных интервалах управления

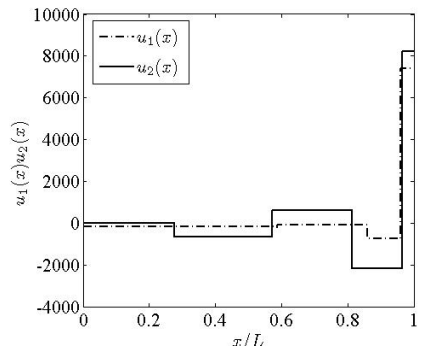


Рис. 14. Графики функций  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  при пяти неравных интервалах управления

Для пятисекционного индуктора графики представлены на рис. 13, 14. Полученные значения критериев:  $I_1=38$  и  $I_2=6$ . Очевидно, что данный случай демонстрирует наилучшие результаты. Характерная особенность всех вариантов с двумя степенями

свободы (длины секций индуктора могут отличаться) заключается в том, что основная мощность прикладывается на последнем коротком интервале управления.

В статье рассматривались вопросы стабилизации стационарного температурного поля при индукционном нагреве теплотехнически тонкого тела. С использованием симплекс-метода было синтезировано оптимальное по среднеквадратичному критерию и критерию максимума отклонения пространственное управление. В качестве параметров оптимизации использовались длины интервалов и величины управляющих воздействий. Было проведено сравнение результатов при различном количестве интервалов управления. Выявлено, что при увеличении числа интервалов качество управления улучшается. Наилучшее качество достигается при наличии двух степеней свободы (выборе одновременно и длин интервалов, и величин управляющих воздействий).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ранопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высш. шк., 2003. – 299 с.
2. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
3. *Lagarias J.C., Reeds J.A.* Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions // *SIAM Journal of Optimization*. – 1998. – Vol. 9. – №1. – PP. 112-147.
4. Optimization Toolbox. User's Guide, Version 3.0. – The MathWorks, Inc., 2004.
5. *Kierzenka J., Shampine L.F.* A BVP Solver based on Residual Control and the MATLAB PSE // *ACM TOMS*. – 2001. – Vol. 27. – №3. – PP. 299-316.

*Статья поступила в редакцию 3 мая 2012 г.*

## THREE-DIMENSIONAL CONTROL SYNTHESIS FOR INDUCTION HEATING PROCESS STABILIZATION

*G.N. Rogachev, D. N. Timchenko*

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

*This paper concerns a possibility to use piecewise-constant three-dimensional control for the temperature field stabilization in the induction heating process. This control is estimated by using the simplex algorithm for root mean square error criterion, and for minimax criterion.*

**Keywords:** *optimal synthesis, induction heating process, temperature field stabilization, spatial control.*