

## МНОГОМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ РОТОРА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОДВЕСЕ

**Ю.А. Макаричев, А.В. Стариков, С.А. Стариков**

Самарский государственный технический университет  
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244  
E-mail: doberman@samtel.ru

*Рассмотрена многомерная модель процесса перемещения ротора в электромагнитном подвесе, учитывающая гироскопический эффект и взаимовлияние каналов управления. Разработаны структурные схемы многомерного объекта управления. Найдены передаточные функции отдельных каналов и прямых перекрестных связей.*

**Ключевые слова:** электромагнитный подвес, многомерная модель, структурная схема, передаточная функция.

Одной из сфер применения электромагнитных подшипников являются высокоскоростные машины. При этом вращающийся ротор, обладающий высокой кинетической энергией вращения, будет вызывать гироскопический эффект, действующий на электромагнитные опоры. Если абсолютно жесткий вал подвесить в магнитном поле двух радиальных подшипников, то его угловое перемещение в одной плоскости вызовет появление гироскопических сил, действующих в другой плоскости (рис. 1).

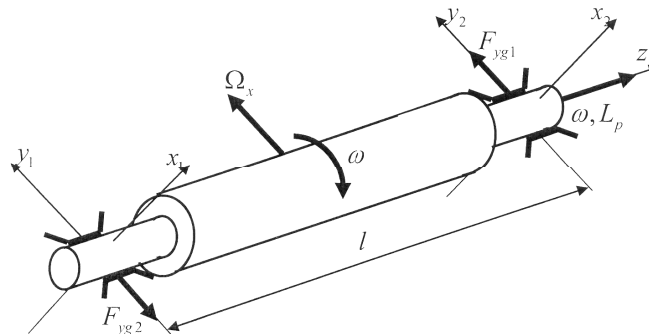


Рис. 1. Проявление гироскопического эффекта в электромагнитном подвесе ротора

В соответствии с приведенным рисунком координатная система  $0x_1y_1$  связана с первым радиальным подшипником, а координатная система  $0x_2y_2$  – со вторым. Расстояние между центрами приложения сил магнитных опор равно  $l$ . Вращение ротора с угловой скоростью  $\omega$  вызывает появление момента импульса [1]

$$L_p = J_z \omega,$$

где  $J_z$  – момент инерции ротора вокруг оси вращения.

---

*Юрий Александрович Макаричев (к.т.н., доц.), доцент каф. электромеханики и автомобильного электрооборудования.*

*Александр Владимирович Стариков (к.т.н., доц.), доцент каф. электропривода и промышленной автоматике.*

*Станислав Александрович Стариков, аспирант.*

Момент импульса является векторной величиной, направление которой совпадает с условным вектором скорости  $\omega$ . Воздействие пары радиальных электромагнитных подшипников, например, в плоскости  $xz$  может вызвать вращательное движение ротора в этой плоскости с угловой скоростью

$$\Omega_x = \frac{1}{l} \frac{d(x_1 - x_2)}{dt},$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – перемещения концов ротора в поле соответствующих электромагнитов,  $l$  – расстояние между центрами электромагнитных опор.

Скорость вращения  $\Omega_x$  также можно представить в виде вектора.

Величина гироскопической силы определяется выражением [1]

$$F_{yg} = \frac{J_z \omega \Omega_x}{l} = \frac{J_z \omega}{l^2} \frac{d(x_1 - x_2)}{dt}.$$

Направление действия гироскопических сил зависит от направления вращения ротора со скоростью  $\omega$ . Если принять за условное положительное направление вращения направление, показанное на рис. 1, то величина и знак гироскопических сил, действующих на первый и второй подшипник в плоскости  $yz$ ,

$$F_{yg2} = -F_{yg1} = \frac{J_z \omega}{l^2} \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} \text{sign}(\omega). \quad (1)$$

Проводя аналогичные рассуждения о движении ротора в плоскости  $yz$ , приходим к формуле, определяющей величину и направление гироскопических сил, действующих на электромагнитные подшипники в плоскости  $xz$ :

$$F_{xg1} = -F_{xg2} = \frac{J_z \omega}{l^2} \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} \text{sign}(\omega). \quad (2)$$

Выражения (1) и (2), а также известная линеаризованная модель электромагнитных подшипников [2] позволяют составить систему уравнений движения ротора в поле электромагнитов с учетом гироскопического эффекта:

$$\left. \begin{aligned} & \left[ mT_{\ominus} p^3 + mp^2 + \left( \frac{k_E k_{\ominus M}}{U} - k_F T_{\ominus} \right) - k_F \right] x_1 = k_{\text{ШИМ}} k_{\ominus M} N_{x1} + \\ & + (T_{\ominus} p + 1) \left( \frac{J_z \omega \text{sign}(\omega)}{l^2} p + k_{F_x} \text{sign}(y_1) \right) y_1 - (T_{\ominus} p + 1) \frac{J_z \omega \text{sign}(\omega)}{l^2} p y_2; \\ & \left[ mT_{\ominus} p^3 + mp^2 + \left( \frac{k_E k_{\ominus M}}{U} - k_F T_{\ominus} \right) - k_F \right] y_1 = k_{\text{ШИМ}} k_{\ominus M} N_{y1} + \\ & + (T_{\ominus} p + 1) \left( k_{F_y} \text{sign}(x_1) - \frac{J_z \omega \text{sign}(\omega)}{l^2} p \right) x_1 + (T_{\ominus} p + 1) \frac{J_z \omega \text{sign}(\omega)}{l^2} p x_2; \\ & \left[ mT_{\ominus} p^3 + mp^2 + \left( \frac{k_E k_{\ominus M}}{U} - k_F T_{\ominus} \right) - k_F \right] x_2 = k_{\text{ШИМ}} k_{\ominus M} N_{x2} + \\ & + (T_{\ominus} p + 1) \left( \frac{J_z \omega \text{sign}(\omega)}{l^2} p + k_{F_x} \text{sign}(y_2) \right) y_2 - (T_{\ominus} p + 1) \frac{J_z \omega \text{sign}(\omega)}{l^2} p y_1; \\ & \left[ mT_{\ominus} p^3 + mp^2 + \left( \frac{k_E k_{\ominus M}}{U} - k_F T_{\ominus} \right) - k_F \right] y_2 = k_{\text{ШИМ}} k_{\ominus M} N_{y2} + \\ & + (T_{\ominus} p + 1) \left( k_{F_y} \text{sign}(x_2) - \frac{J_z \omega \text{sign}(\omega)}{l^2} p \right) x_2 + (T_{\ominus} p + 1) \frac{J_z \omega \text{sign}(\omega)}{l^2} p x_1, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $m$  – масса ротора, приходящаяся на один радиальный электромагнитный подшипник;  $T_{\ominus}$  – электромагнитная постоянная времени обмотки одного магнита;  $k_E$  – коэффициент, связывающий э. д. с., наводимую в обмотке электромагнита, со скоростью перемещения ротора;  $k_{\ominus M}$  – коэффициент, определяющий силу притяжения электромагнитов с соотношением токов в обмотках;  $k_F$  – коэффициент положительной обратной связи, зависящий от величины смещения ротора от центрального положения;  $k_{\text{ШИМ}}$  – коэффициент передачи широтно-импульсного модулятора;  $U$  – опорное напряжение широтно-импульсной модуляции;  $N_{x1}, N_{x2}; N_{y1}, N_{y2}$  – входные управляющие воздействия по координатам  $x_1, x_2; y_1, y_2$  соответственно;  $p$  – оператор дифференцирования.

Системе уравнений (3) соответствует четырехмерная структурная схема процесса левитации ротора как объекта управления (рис. 2).

Предположим, что вращение ротора происходит в одном определенном направлении, а его смещение, например, под действием силы тяжести наблюдается в отрицательных направлениях осей координат электромагнитных подшипников. Тогда в системе (3) можно опустить символы *sign*, перейти от оригиналов к преобразованиям Лапласа и, применяя принцип суперпозиции, найти собственные передаточные функции сепаратных каналов. Следует отметить, что собственные передаточные функции первого и второго каналов равны между собой:

$$\begin{aligned} W_{11}(p) &= \frac{x_1(p)}{N_{x1}(p)} = W_{22}(p) = \frac{y_1(p)}{N_{y1}(p)} = \\ &= \frac{k_{\text{ШИМ}}k_{\ominus M}W_{10}(p)[W_{10}^2(p) + W_{\Gamma}^2(p) + W_{x2}(p)W_{y2}(p)]}{A(p)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $W_{10}(p) = mT_{\ominus}p^3 + mp^2 + \left(\frac{k_E k_{\ominus M}}{U} - k_F T_{\ominus}\right) - k_F$ ;

$$W_{\Gamma}(p) = (T_{\ominus}p + 1)\frac{J_z \omega}{I^2} p; \quad W_{x1}(p) = (T_{\ominus}p + 1)\left(\frac{J_z \omega}{I^2} p + k_{Fx}\right);$$

$$W_{y1}(p) = (T_{\ominus}p + 1)\left(\frac{J_z \omega}{I^2} p - k_{Fy}\right);$$

$$W_{x2}(p) = (T_{\ominus}p + 1)\left(\frac{J_z \omega}{I^2} p + k_{Fx}\right);$$

$$W_{y2}(p) = (T_{\ominus}p + 1)\left(\frac{J_z \omega}{I^2} p - k_{Fy}\right);$$

$$\begin{aligned} A(p) &= [W_{10}^2(p) + W_{\Gamma}^2(p) + W_{x1}(p)W_{y1}(p)][W_{10}^2(p) + W_{\Gamma}^2(p) + W_{x2}(p)W_{y2}(p)] - \\ &- W_{\Gamma}^2(p)[W_{x1}(p) + W_{y2}(p)][W_{y1}(p) + W_{x2}(p)] \end{aligned}$$

Передаточные функции третьего и четвертого сепаратных каналов:

$$W_{33}(p) = \frac{x_2(p)}{N_{x2}(p)} = W_{44}(p) = \frac{y_2(p)}{N_{y2}(p)} = \frac{k_{ШИМ}k_{ЭМ}W_{1o}(p)[W_{1o}^2(p) + W_{\Gamma}^2(p) + W_{x1}(p)W_{y1}(p)]}{A(p)}. \quad (5)$$

Система уравнений (3) позволяет также найти передаточные функции прямых перекрестных связей, описывающих взаимное влияние каналов управления:

$$W_{21}(p) = \frac{y_1(p)}{N_{x1}(p)} = -\frac{k_{ШИМ}k_{ЭМ}\{W_{y1}(p)[W_{1o}^2(p) + W_{x2}(p)W_{y2}(p)] - W_{\Gamma}^2(p)W_{x2}(p)\}}{A(p)}; \quad (6)$$

$$W_{31}(p) = \frac{x_2(p)}{N_{x1}(p)} = \frac{k_{ШИМ}k_{ЭМ}W_{1o}(p)W_{\Gamma}(p)[W_{y1}(p) + W_{x2}(p)]}{A(p)}; \quad (7)$$

$$W_{41}(p) = \frac{y_2(p)}{N_{x1}(p)} = \frac{k_{ШИМ}k_{ЭМ}W_{\Gamma}(p)[W_{1o}^2(p) + W_{\Gamma}^2(p) - W_{y1}(p)W_{y2}(p)]}{A(p)}; \quad (8)$$

$$W_{12}(p) = \frac{x_1(p)}{N_{y1}(p)} = \frac{k_{ШИМ}k_{ЭМ}\{W_{x1}(p)[W_{1o}^2(p) + W_{x2}(p)W_{y2}(p)] - W_{\Gamma}^2(p)W_{y2}(p)\}}{A(p)}; \quad (9)$$

$$W_{32}(p) = \frac{x_2(p)}{N_{y1}(p)} = -\frac{k_{ШИМ}k_{ЭМ}W_{\Gamma}(p)[W_{1o}^2(p) + W_{\Gamma}^2(p) - W_{x1}(p)W_{x2}(p)]}{A(p)}; \quad (10)$$

$$W_{42}(p) = \frac{y_2(p)}{N_{y1}(p)} = \frac{k_{ШИМ}k_{ЭМ}W_{1o}(p)W_{\Gamma}(p)[W_{x1}(p) + W_{y2}(p)]}{A(p)}; \quad (11)$$

$$W_{13}(p) = \frac{x_1(p)}{N_{x2}(p)} = \frac{k_{ШИМ}k_{ЭМ}W_{1o}(p)W_{\Gamma}(p)[W_{x1}(p) + W_{y2}(p)]}{A(p)}; \quad (12)$$

$$W_{23}(p) = \frac{y_1(p)}{N_{x2}(p)} = -\frac{k_{ШИМ}k_{ЭМ}W_{\Gamma}(p)[W_{1o}^2(p) + W_{\Gamma}^2(p) - W_{y1}(p)W_{y2}(p)]}{A(p)}; \quad (13)$$

$$W_{43}(p) = \frac{y_2(p)}{N_{x2}(p)} = -\frac{k_{ШИМ}k_{ЭМ}\{W_{y2}(p)[W_{1o}^2(p) + W_{x1}(p)W_{y1}(p)] - W_{\Gamma}^2(p)W_{x1}(p)\}}{A(p)}; \quad (14)$$

$$W_{14}(p) = \frac{x_1(p)}{N_{y2}(p)} = -\frac{k_{ШИМ}k_{ЭМ}W_{\Gamma}(p)[W_{1o}^2(p) + W_{\Gamma}^2(p) - W_{x1}(p)W_{x2}(p)]}{A(p)}; \quad (15)$$

$$W_{24}(p) = \frac{y_1(p)}{N_{y2}(p)} = \frac{k_{ШИМ}k_{ЭМ}W_{1o}(p)W_{\Gamma}(p)[W_{y1}(p) + W_{x2}(p)]}{A(p)}; \quad (16)$$

$$W_{34}(p) = \frac{x_2(p)}{N_{y2}(p)} = \frac{k_{ШИМ}k_{ЭМ}\{W_{x2}(p)[W_{1o}^2(p) + W_{x1}(p)W_{y1}(p)] - W_{\Gamma}^2(p)W_{y1}(p)\}}{A(p)}. \quad (17)$$

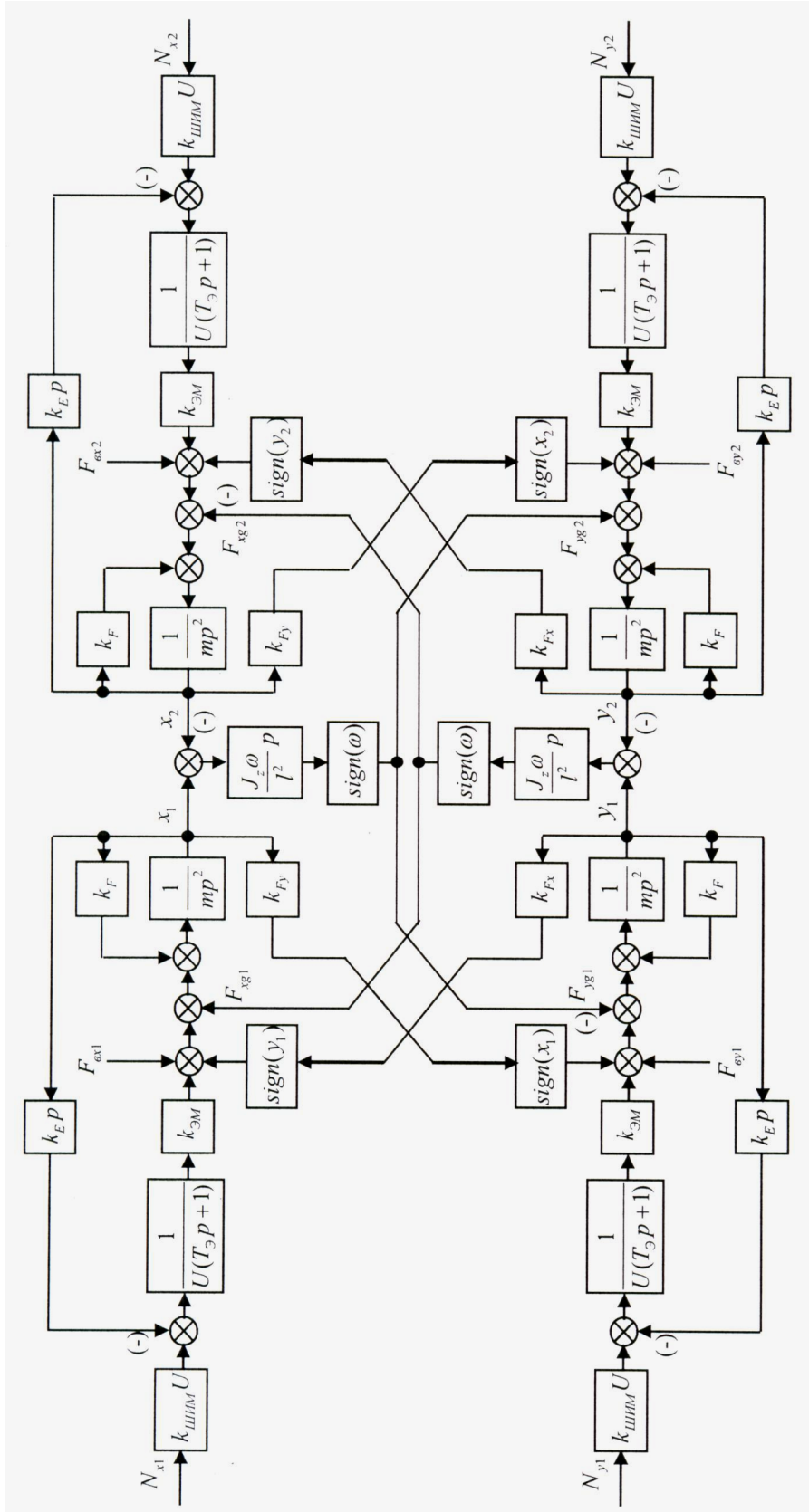


Рис. 2. Четырехмерная структурная схема процесса левитации ротора как объекта управления

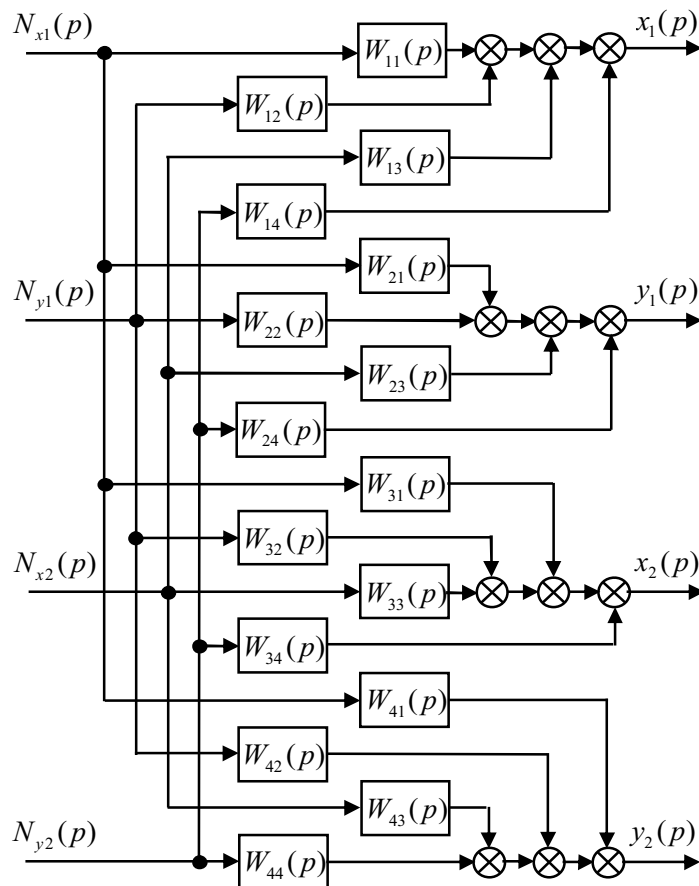


Рис. 3. Четырехмерная нормализованная структурная схема электромагнитного подвеса ротора

Передаточные функции (4) – (17) являются основой для построения структурной схемы процесса перемещения ротора в нормализованном виде многомерного и многосвязного объекта управления с прямыми перекрестными связями (рис. 3).

Определение передаточных функций четырехмерной модели электромагнитного подвеса гибкого ротора является нецелесообразным, поскольку собственные частоты и коэффициенты форм будут зависеть от жесткости опор, которые глобальным образом связаны со свойствами системы управления подшипниками. Поэтому влияние гибкого ротора на работоспособность подвеса более логично исследовать методом компьютерного моделирования конкретных вариантов разрабатываемой многомерной системы.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Павлов В.А. Гироскопический эффект. Его проявление и использование. – Л.: Судостроение, 1972. – 284 с.
2. Макаричев Ю.А., Стариков А.В. Теоретические основы расчета и проектирования радиальных электромагнитных подшипников. – М.: Энергоатомиздат, 2009. – 150 с.

Статья поступила в редакцию 15 февраля 2012 г.

## MULTIDIMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL OF PROCESS OF MOVING OF THE ROTOR IN ELECTROMAGNETIC SUSPENSION

***Yu.A. Makarichev, A.V. Starikov, S.A. Starikov***

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

*The multidimensional model of process of moving of the rotor in electromagnetic suspension, considering gyroscopic effect and interference of control paths is considered. Block diagrams of multidimensional control object are developed. Transfer functions of separate channels and direct cross-connections are found.*

**Keywords:** *electromagnetic suspension, multidimensional mathematical model, function block diagram, transfer function.*

---

*Yury A. Makarichev (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor:  
Alexander V. Starikov (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor:  
Stanislav A. Starikov, Postgraduate student.*