УДК 621.317.1

# МЕТРОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОБРАЗЦОВЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ОБРАТНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

***В.Я. Купер[1], М.Г. Рубцов[2]***

[1] Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

[2] ООО «Научно-производственный центр ПАЛС»
443095, г. Самара, ул. Ташкентская, 196

E-mail: mg.rubtsov@mail.ru

*Рассматриваются методы повышения точности измерений на основе обратных математических моделей измерительного канала, в качестве которых используются интерполяционные полиномы Лагранжа. Анализируются основные составляющие погрешности результата измерений при использовании методов образцовых сигналов и обратных интерполяционных моделей, решается задача оптимального выбора значений образцовых величин.*

***Ключевые слова:*** *повышение точности измерений, погрешность измерений, измерительный канал, интерполяционный полином, методы образцовых сигналов.*

В работе [1] рассмотрены алгоритмические методы повышения точности измерений на основе обратных интерполяционных моделей измерительного канала, показаны их достоинства и перспективность применения как для линейных, так и для нелинейных моделей функции преобразования средств измерений. Настоящая работа посвящена метрологическому анализу методов образцовых сигналов, в которых используются обратные интерполяционные модели, и оптимальному выбору значений образцовых сигналов.

Если обратный интерполяционный полином Лагранжа имеет порядок $n$, то оценка значения измеряемой величины вычисляется по формуле [1]

$$X = \sum_{j=0}^{n} \frac{\prod\limits_{\substack{i=0;j=0\\ i\neq j}}^{n} (Y_x - Y_i)}{\prod\limits_{\substack{i=0;j=0\\ i\neq j}}^{n} (Y_j - Y_i)} \cdot M_j , \tag{1}$$

где $X$ – значение измеряемой величины;

$M_j$ – значения образцовых величин;

$j$ – номер узла интерполяции;

$Y_x$ – значение выходной величины измерительного канала, соответствующее значению $X$ на его входе;

$Y_i, Y_j$ – значения выходной величины в узлах интерполяции;

$n$ – порядок интерполяционного полинома.

---

*Виталий Яковлевич Купер (к.т.н., доцент), доцент кафедры «Информационно-измерительная техника».*

*Михаил Геннадьевич Рубцов (к.т.н.), директор.*

Наиболее часто на практике используются интерполяционные полиномы второго порядка ($n$=2). Тогда формула (1) принимает вид

$$X = L_0(Y_X)\cdot M_0 + L_1(Y_X)\cdot M_1 + L_2(Y_X)\cdot M_2, \tag{2}$$

где $L_0(Y_x) = \dfrac{(Y_X - Y_1)\cdot(Y_X - Y_2)}{(Y_0 - Y_1)\cdot(Y_0 - Y_2)}$;

$$L_1(Y_x) = \frac{(Y_X - Y_0)\cdot(Y_X - Y_2)}{(Y_1 - Y_0)\cdot(Y_1 - Y_2)};$$

$$L_2(Y_x) = \frac{(Y_X - Y_0)\cdot(Y_X - Y_1)}{(Y_2 - Y_0)\cdot(Y_2 - Y_1)}.$$

В этом случае выполняют последовательно четыре измерения: измеряемой величины $X$ и трех образцовых величин $M_0, M_1, M_2$. Соответствующие результаты измерений обозначены $Y_x, Y_0, Y_1, Y_2$. Оценка значения измеряемой величины $X$ вычисляется по формуле (2) и не зависит от параметров функции преобразования измерительного канала, что и обеспечивает повышение точности измерений.

Точность оценки значения измеряемой величины $X$ определяется главным образом точностью образцовых величин $M_0, M_1, M_2$, отклонением используемой интерполяционной модели от реальной функции преобразования средства измерений и случайными погрешностями значений $Y_x, Y_0, Y_1, Y_2$ выходной величины. Проанализируем каждую из указанных составляющих погрешности.

**Анализ погрешности из-за неточности образцовых сигналов.** Из формулы (1) следует, что если значения образцовых величин $M_j$ имеют абсолютные погрешности $\Delta M_j$, то соответствующая абсолютная погрешность оценки значения измеряемой величины $\Delta X_M$ равна

$$\Delta X_M = \sum_{j=0}^{n} L_j(Y_X)\cdot \Delta M_j\,. \tag{3}$$

В частности, для интерполяционного полинома второго порядка получим

$$\Delta X_M = L_0(Y_X)\cdot\Delta M_0 + L_1(Y_X)\cdot\Delta M_1 + L_2(Y_X)\cdot\Delta M_2\,.$$

В большинстве случаев практики при анализе данной составляющей погрешности можно пренебречь нелинейностью функции преобразования средства измерений. Тогда формула (3) примет вид

$$\Delta X_M = \sum_{j=0}^{n} \rho_j \cdot \Delta M_j\,, \tag{4}$$

где $\rho_j = \dfrac{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}(X - M_i)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}(M_j - M_i)}$.

Таким образом, погрешность $\Delta X_M$ равна сумме $\Delta M_j$ с весами $\rho_j$, причем $\sum_{j=0}^{n} \rho_j = 1$.

Анализ формулы (4) показывает, что в узлах интерполяции ($X = M_j$) погрешность $\Delta X_M$ равна погрешности соответствующего образцового сигнала, т. е. $\Delta X_M = \Delta M_j$, а в других точках диапазона измерений равна взвешенной сумме погрешностей образцовых сигналов.

**Анализ погрешности из-за отличия интерполяционной модели от реальной функции преобразования средства измерений.** Из теории интерполирования функций известно [2], что при использовании интерполяционной формулы Лагранжа абсолютная величина погрешности интерполяции для обратной интерполяционной модели не превышает значения

$$\Delta X_{инт} \le \frac{\max\left|f^{(n+1)}(Y)\right|}{(n+1)!} \cdot \left|\prod\nolimits_{n+1}(Y)\right|, \tag{5}$$

где $\Delta X_{инт}$ – абсолютная величина погрешности интерполяции;

$n$ – порядок интерполяционного полинома;

$f^{(n+1)}(Y)$ – производная (n+1)-го порядка обратной функции преобразования средства измерений;

$$\prod\nolimits_{n+1}(Y) = (Y_x - Y_0) \cdot (Y_x - Y_1) \cdot \ldots \cdot (Y_x - Y_n). \tag{6}$$

Если используется модель 2-го порядка (n=2), то формула (5) принимает вид

$$\Delta X_{инт} \le \frac{\max\left|f^{(3)}(Y)\right|}{6} \cdot \left|(Y_x - Y_0) \cdot (Y_x - Y_1) \cdot (Y_x - Y_{2)}\right|.$$

Учитывая монотонность реальной функции преобразования средств измерений, можно считать, что при использовании модели второго порядка действительная обратная функция преобразования удовлетворительно описывается степенным полиномом 3-го порядка

$$x = a_0 + a_1 \cdot Y + a_2 \cdot Y^2 + a_3 \cdot Y^3.$$

Тогда

$$\max\left|f^{(3)}(Y)\right| = 6 \cdot |a_3|, \text{ а } \Delta X_{инт} \le |a_3| \cdot \left|(Y_x - Y_0) \cdot (Y_x - Y_1) \cdot (Y_x - Y_2)\right|. \tag{7}$$

В узлах интерполяции $x = M_0; x = M_1; x = M_2$ значения выходной величины $Y_x$ равны соответственно $Y_0, Y_1, Y_2$, следовательно, по формуле (7) погрешность интерполяции в узлах интерполяции равна нулю.

Для оценки погрешности интерполяции во всем диапазоне измерений необходимо проанализировать функцию (6). Пусть диапазон изменения измеряемой величины составляет $[x_{\min}; x_{\max}]$. Соответствующий диапазон изменения выходной величины $[Y_{\min}; Y_{\max}]$. Предположим, что $M_0 = x_{\min}; M_2 = x_{\max}$, тогда $Y_0 = Y_{\min}; Y_2 = Y_{\max}$.

Введем безразмерную выходную величину $Y^* = \dfrac{Y - Y_{\min}}{Y_{\max} - Y_{\min}}$, которая в диапазоне измерений изменяется в пределах [0;1]. Тогда $Y_0^* = 0; Y_2^* = 1$, а $Y_1^* = \alpha$, причем $\alpha \in [0;1]$. Выходной величине $Y_x$ будет соответствовать нормированное значение $Y_x^* \in [0;1]$.

Введем обозначение $D_Y = Y_{\max} - Y_{\min}$ – диапазон изменения выходной величины.

Тогда формулу (7) можно представить в виде

$$\Delta X_{инт} \le |a_3| \cdot D_Y^3 \cdot \left| Y_x^* \cdot (Y_x^* - \alpha) \cdot (Y_x^* - 1) \right|. \tag{8}$$

Функция (8) равна нулю при $Y_x^* = 0; Y_x^* = \alpha; Y_x^* = 1$ и имеет два экстремума (максимума) при

$$Y_x^* = \frac{1}{3} \cdot [(1+\alpha) \pm \sqrt{(1+\alpha)^2 - 3 \cdot \alpha}]. \tag{9}$$

Подставив формулу (9) в (8), получим верхний предел погрешности интерполяции. На практике обычно принимают $\alpha = 0{,}5$. При этом экстремумы функции (8) имеют место при $Y_x^* = \dfrac{1}{2} \cdot (1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}})$. В обеих точках экстремума погрешность интерполяции не превышает $\Delta X_{инт} \le \dfrac{|a_3| \cdot D_Y^3}{12 \cdot \sqrt{3}}$.

Значение коэффициента $a_3$ определяется экспериментально путем проведения активного регрессионного эксперимента и построения обратной модели в виде степенного полинома 3-го порядка.

**Анализ случайной погрешности.** Случайная погрешность проявляет себя в случайных отклонениях получаемых значений выходной величины $Y_x, Y_0, Y_1, ... Y_n$ от значений, соответствующих градуировочной характеристике средства измерений. Предположим, что эти отклонения $\Delta Y_x, \Delta Y_0, \Delta Y_1, ... \Delta Y_n$ аддитивны, независимы и имеют одинаковую дисперсию $\sigma_Y^2$. Эти случайные отклонения через функцию (1) трансформируются в случайную погрешность вычисленного результата измерений.

Для анализа этой погрешности целесообразно все погрешности $\Delta Y$ привести ко входу средства измерений с помощью формулы

$$\Delta X = \Delta Y / S,$$

где $\Delta X$ – погрешность, приведенная ко входу средства измерений;

$\Delta Y$ – погрешность на выходе средства измерений;

$S$ – чувствительность средства измерений в данной точке диапазона измерений.

При анализе случайной погрешности можно пренебречь погрешностью нелинейности функции преобразования, т. е. можно считать, что $S = const$. Тогда дисперсия случайной погрешности, приведенной ко входу средства измерений, равна

$$\sigma_{вх}^2 = \sigma_Y^2 / S^2 .$$

Случайную погрешность, приведенную ко входу, можно рассматривать как эквивалентное изменение входной величины в соответствующем измерении. Таким образом, случайные отклонения $\Delta Y_x, \Delta Y_0, \Delta Y_1, ..., \Delta Y_n$ соответствуют эквивалентным отклонениям $\Delta X_{вх}, \Delta M_0, \Delta M_1, ..., \Delta M_n$ входных величин $X, M_0, M_1, ..., M_n$.

В соответствии с формулой (1) эти отклонения входных величин приводят к погрешности вычисленного значения измеряемой величины:

$$\Delta X = \Delta X_{вх} + \sum_{j=0}^{n} L_j(Y_x) \cdot \Delta M_j .$$

Отсюда следует, что дисперсия случайной погрешности вычисленного результата измерений равна

$$\sigma_X^2 = \sigma_{вх}^2 \cdot \{1 + \sum_{j=0}^{n} [L_j(Y_x)]^2\} .$$

Отношение

$$\lambda = \frac{\sigma_X}{\sigma_{вх}} = \sqrt{1 + \sum_{j=0}^{n} [L_j(Y_x)]^2} \qquad (10)$$

характеризует степень усиления случайной погрешности в результате применения алгоритма повышения точности. Очевидно, что $\lambda \geq 1$.

Для модели 2-го порядка ($n = 2$) формула (10) принимает вид

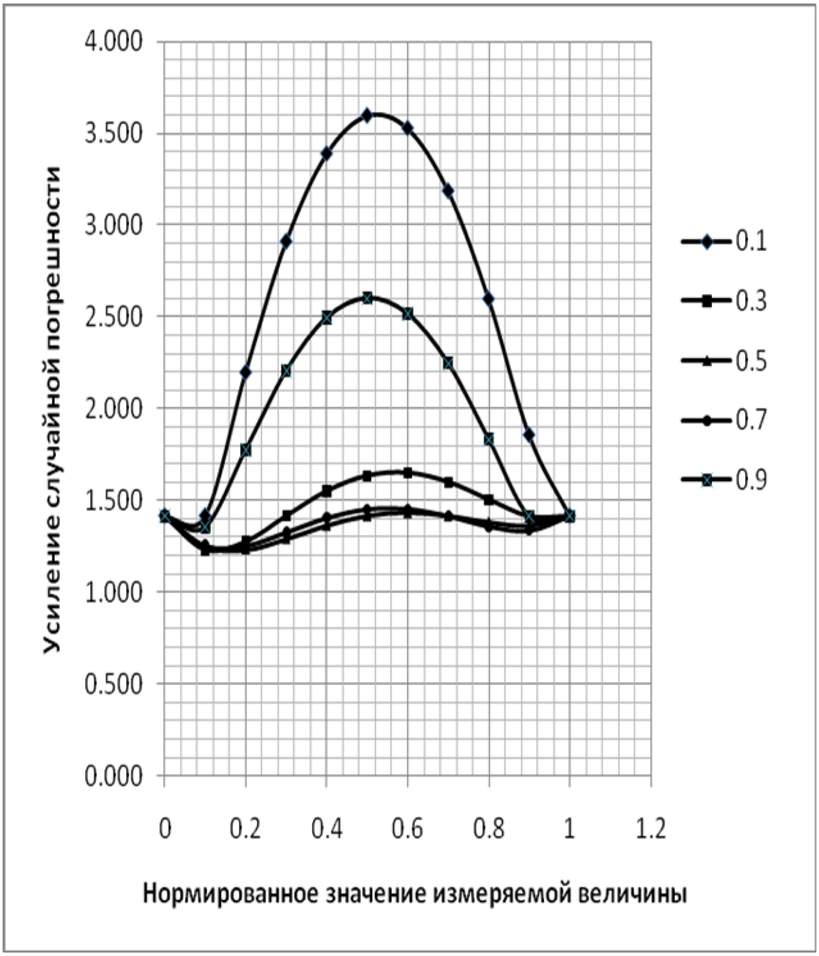
$$\lambda = \sqrt{1 + [\frac{(Y_x - Y_1)\cdot(Y_x - Y_2)}{(Y_0 - Y_1)\cdot(Y_0 - Y_1)}]^2 + [\frac{(Y_x - Y_0)\cdot(Y_x - Y_2)}{(Y_1 - Y_0)\cdot(Y_1 - Y_2)}]^2 + [\frac{(Y_x - Y_0)\cdot(Y_x - Y_1)}{(Y_2 - Y_0)\cdot(Y_2 - Y_1)}]^2} . \qquad (11)$$

При анализе случайной погрешности для упрощения формулы (11) можно пренебречь нелинейностью функции преобразования средства измерений. Тогда, считая, что $M_0 = 0$; $M_1 = \alpha \cdot X_{\max}$; $M_2 = X_{\max}$, и введя безразмерную нормированную переменную $X_н = X / X_{\max}$, получим

$$\lambda = \sqrt{1 + (1 - X_н)^2 \cdot (1 - X_н)^2 + \frac{X_н^2 \cdot (1 - X_н)^2}{\alpha^2 \cdot (1 - \alpha)^2} + \frac{X_н^2 \cdot (X_н - \alpha)^2}{(1 - \alpha)^2}} . \qquad (12)$$

Из формулы (12) следует, что в узлах интерполяции ($X_н = 0; X_н = \alpha; X_н = 1$) случайная погрешность усиливается в $\sqrt{2}$ раз. На рисунке приведены зависимости степени усиления $\lambda$ случайной погрешности от нормированного значения измеряемой величины $X_н$ при различных положениях значения меры $M_1$ в диапазоне измерений (при различных значениях $\alpha$).

Из графиков видно, что если значение $\alpha$ выбирается в пределах $\alpha = 0{,}5...0{,}7$, то степень усиления случайной погрешности не превышает $\sqrt{2}$ во всем диапазоне изменения измеряемой величины. Оценка величины $\sigma_{вх}$ должна быть получена экспериментально.




Степень усиления случайной погрешности

Таким образом, выполненный метрологический анализ методов образцовых сигналов на основе обратных интерполяционных моделей позволяет оптимизировать значения образцовых воздействий, а также оценить основные составляющие результирующей погрешности измерений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. *Купер В.Я., Рубцов М.Г.* Алгоритмические методы повышения точности измерений на основе обратных интерполяционных моделей // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Технические науки, №7(28). – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – С. 67-73.
2. *Куликовский К.Л., Купер В.Я.* Методы и средства измерений: Учеб. пособие для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 448 с.



*Статья поступила в редакцию 30 января 2012 г.*

# THE METROLOGICAL ANALYSIS OF METHODS OF EXEMPLARY SIGNALS ON THE BASIS OF RETURN INTERPOLATIONAL MODELS

*V.Ya. Kuper*[1]*, M.G. Rubtsov*[2]

Samara State Technical Universitet
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

"Scientific@Production Center PALS"
196, Tashkentskaya st., Samara, 443095

*In paper methods of raise of accuracy of measurements on the basis of return mathematical models of a measuring channel are observed, in the capacity of which interpolational polynomials of Lagranzh are used. The basic making error+s of result of measurements are analyzed at use of methods of exemplary signals and return interpolational models, the problem of optimum sampling of values of exemplary magnitudes is solved.*

**Keywords:** *raise of accuracy of measurements, error of measurements, a measuring channel, an interpolational polynomial, methods of exemplary signals.*

*Vitali Ya. Kuper (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.*
*Michael G. Rubtsov (Ph.D. (Techn.)), director.*