УДК 536.2 (075)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А.В. Еремин, И.В. Кудинов

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: a.v.eremin@list.ru

Представлены результаты разработки приближенного аналитического метода решения нестационарных задач теплопроводности, основанного на совместном использовании метода разделения переменных и ортогональных методов взвешенных невязок. Отмечается высокая точность получаемых из решения краевой задачи Штурма – Лиувилля собственных значений. Так, например, при нахождении первых 17 собственных чисел первые четыре из них с точностью до 16-го знака после запятой совпадают с точными их значениями, а последнее (17-е) – с точностью до первого знака. Столь высокая точность определения собственных чисел объясняется тем, что благодаря принятому методу решения дифференциальное уравнение краевой задачи Штурма – Лиувилля в количестве точек области, равном числу собственных чисел, удовлетворяется точно.

Ключевые слова: *задача Штурма – Лиувилля, аналитическое решение, ортогональные методы, метод разделения переменных, собственные числа.*

В работах [1, 2] приведены результаты разработки метода решения нестационарных задач теплопроводности, основанного на использовании дополнительных граничных условий. Физический смысл таких условий заключается в выполнении дифференциального уравнения краевой задачи Штурма – Лиувилля, получаемого после разделения переменных в исходном дифференциальном уравнении, и производных от него различного порядка в граничных точках пространственной переменной. Решение задачи Штурма – Лиувилля разыскивается при этом в виде бесконечного ряда при использовании алгебраических или тригонометрических координатных функций. Удовлетворение дополнительных граничных условий приводит к выполнению дифференциального уравнения внутри области с точностью, зависящей от числа приближений (числа членов ряда решения). Такой метод позволяет решать нестационарные задачи для любых дифференциальных операторов, допускающих разделение переменных. Однако при его использовании отмечается медленная сходимость ряда решения, когда с увеличением числа его членов точность повышается незначительно.

Ниже излагается новый подход к решению указанных задач, не связанный с использованием дополнительных граничных условий. Идею метода рассмотрим на примере решения краевой задачи теплопроводности для бесконечной пластины при симметричных граничных условиях первого рода в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2}\ ; \qquad (\tau > 0;\quad 0 \le x \le \delta); \tag{1}$$

$$t(x,0) = t_0\ ; \qquad \partial t(0,\tau)/\partial x = 0\ ; \qquad t(\delta,\tau) = t_{ñò}\ , \tag{2}$$

Антон Владимирович Еремин, аспирант.
Игорь Васильевич Кудинов, аспирант.

где t – температура; x – координата; τ − время; t_0 − начальная температура; $t_{ст}$ − температура стенки; a – коэффициент температуропроводности; δ − половина толщины пластины.

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\Theta = (t - t_{ñò})/(t_0 - t_{ñò})\,; \qquad \xi = x/\delta\,; \qquad Fo = a\tau/\delta^2\,,$$

где Θ − относительная избыточная температура; ξ − безразмерная координата; Fo – число Фурье.

С учетом принятых обозначений задача (1), (2) приводится к виду

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}; \qquad (\mathrm{Fo} > 0;\quad 0 \le \xi \le 1); \tag{3}$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \tag{4}$$

$$\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi} = 0; \tag{5}$$

$$\Theta(1,\mathrm{Fo}) = 0. \tag{6}$$

Решение задачи (3) – (6), следуя методу разделения переменных, разыскиваем в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \varphi(\mathrm{Fo})\psi(\xi). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (1), находим

$$d\varphi(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo} + \nu\varphi(\mathrm{Fo}) = 0; \tag{8}$$

$$d^2\psi(\xi)/d\xi^2 + \nu\psi(\xi) = 0, \tag{9}$$

где ν − некоторая постоянная.

Решение уравнения (8) известно и имеет вид

$$\varphi(\mathrm{Fo}) = A\exp(-\nu\mathrm{Fo}), \tag{10}$$

где A – неизвестный коэффициент.

Подставляя (7) в (5), (6), получаем

$$d\psi(0)/d\xi = 0; \tag{11}$$

$$\psi(1) = 0. \tag{12}$$

Решение краевой задачи Штурма – Лиувилля (9), (11), (12) принимается в виде

$$\psi(\xi) = B_0 + \sum_{i=1}^{r} B_i \xi^{i+1}, \tag{13}$$

где $B_i\,(i = \overline{1,\ r})$ – неизвестные коэффициенты. Отметим, что соотношение (13) удовлетворяет граничному условию (11).

Соотношение (11) позволяет ввести еще одно граничное условие

$$\psi(0) = const = 1. \tag{14}$$

Подставляя (13) в (14), находим $B_0 = 1$.

Потребуем, чтобы соотношение (13) удовлетворяло граничному условию (12) и уравнению (9) в точках $\xi = 0; 0{,}25; 0{,}5; 0{,}75$. Подставляя (13), ограничиваясь пятью членами ряда, в соотношение (12) и уравнение (9), применительно к точкам $\xi = 0; 0{,}25; 0{,}5; 0{,}75$ относительно неизвестных коэффициентов B_i $\left(i = \overline{1,5}\right)$ получаем систему пяти алгебраических линейных уравнений. Из решения этой системы находим:

$$B_1 = -\nu/2;$$

$$B_2 = \left(25\nu^4 - 3594\nu^3 + 162080\nu^2 - 2370560\nu + 4915200\right)/c_1;$$

$$B_3 = -\left(105\nu^4 - 18134\nu^3 + 847280\nu^2 - 12945920\nu + 27033600\right)/c_2;$$

$$B_4 = 2\left(40\nu^4 - 7632\nu^3 + 371712\nu^2 - 5652480\nu + 11796480\right)/c_1;$$

$$B_5 = -\left(48\nu^4 - 9760\nu^3 + 494848\nu^2 - 7536640\,\nu + 15728640\right)/\tilde{n}_2;$$

$$c_1 = 6\nu^3 - 512\nu^2 + 20480\nu; \quad c_2 = 9\nu^3 - 768\,\nu^2 + 30720\,\nu.$$

Найдем интеграл взвешенной невязки уравнения (9)

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(1 + \sum_{i=1}^{r} B_i\, \xi^{i+1}\right) + \nu\left(1 + \sum_{i=1}^{r} B_i\, \xi^{i+1}\right)\right] d\,\xi = 0. \tag{15}$$

Определяя интегралы в (15), с учетом найденных значений коэффициентов B_i $\left(i = \overline{1,5}\right)$ относительно собственных чисел ν_k получаем алгебраическое уравнение пятой степени

$$17901\nu^5 - 1{,}0173\cdot 10^{-7}\nu^4 + 1{,}8109\cdot 10^{-9}\nu^3 - 1{,}0253\cdot 10^{-11}\nu^2 +$$
$$+ 1{,}6365\cdot 10^{-12}\nu - 3{,}4401\cdot 10^{-12} = 0. \tag{16}$$

Из решения уравнения (16) получаем пять собственных чисел, два из которых – комплексные самосопряженные. Принимая только действительные собственные числа, получаем $\nu_1 = 2{,}467312$; $\nu_2 = 21{,}896613$; $\nu_3 = 60{,}857583$.

Точные значения первых трех собственных чисел [3] $\nu_1 = 2{,}467401$; $\nu_2 = 22{,}206609$; $\nu_3 = 61{,}685028$.

Для уточнения собственных чисел составим невязку уравнения (9) и потребуем ортогональность невязки к собственной функции (13)

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(1 + \sum_{i=1}^{r} B_i\, \xi^{i+1}\right) + \nu\left(1 + \sum_{i=1}^{r} B_i\, \xi^{i+1}\right)\right]\left(1 + \sum_{i=1}^{r} B_i\, \xi^{i+1}\right) d\,\xi = 0. \tag{17}$$

Определяя интегралы в (17), относительно собственных чисел получаем следующее алгебраическое уравнение:

$$\frac{127\cdot\nu^9}{360360} - \frac{151661\cdot\nu^8}{540540} + \frac{70854041\cdot\nu^7}{810810} - \frac{788626739\cdot\nu^6}{57915} +$$
$$+ \frac{30919800416\cdot\nu^5}{27027} - \frac{42184735060048\cdot\nu^4}{81081} + \frac{98609306255360\cdot\nu^3}{81081} -$$
$$- \frac{38813935861760\cdot\nu^2}{3003} + \frac{19207395737600\cdot\nu}{429} - \frac{11140071424000}{231} = 0. \tag{18}$$

Из решения уравнения (18) получаем девять собственных чисел, шесть из которых комплексные. Действительные собственные числа имеют вид $\nu_1 = 2{,}467401$; $\nu_2 = 22{,}215176$; $\nu_3 = 61{,}929695$. Как видно из полученных результатов, требование ортогональности невязки уравнения (9) к собственной функции (13) приводит к значительному повышению точности определения собственных чисел. Следует, однако, отметить, что объем вычислительной работы в данном случае существенно возрастает – возрастает также степень алгебраического уравнения относительно собственных чисел.

Подставляя (10), (13) в (7), для каждого собственного числа будем иметь частные решения вида

$$\Theta_k(\xi, Fo) = A_k \exp(-\nu_k)\left(1 + \sum_{i=1}^{r} B_i(\nu_k)\xi^{i+1}\right). \tag{19}$$

Каждое частное решение из (19) точно удовлетворяет граничным условиям (5), (6) и приближенно (в третьем приближении) – уравнению (3). Однако ни одно из них, в том числе и их сумма

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{n}\left[A_k \exp(-\nu_k)\left(1 + \sum_{i=1}^{r} B_i(\nu_k)\xi^{i+1}\right)\right], \tag{20}$$

не удовлетворяют начальному условию (4). Для выполнения начального условия составляется его невязка и требуется ортогональность невязки к каждой собственной функции, т. е.

$$\int_0^1 \left\{\sum_{k=1}^{3}\left[A_k \sum_{i=1}^{r} B_i(\nu_k)\xi^{k+1}\right] - 1\right\}\psi_j(\nu_j, \xi)d\xi = 0; \qquad (j = 1, 2, 3;\ r = 5). \tag{21}$$

Определяя интегралы в (21), для нахождения A_k $(k = \overline{1, 3})$ получаем систему трех алгебраических линейных уравнений. Ее решение

$$A_1 = 1{,}27798;\ A_2 = -0{,}4337;\ A_3 = 0{,}265008.$$

Точные значения первых трех коэффициентов A_k приведены в таблице.

Результаты расчетов по формуле (20) при $n = 3$ и $r = 5$ даны на рис. 1. Их анализ позволяет заключить, что в диапазоне чисел $0{,}03 \le Fo < \infty$ отличие полученного решения от точного не превышает 1 %.

Для повышения точности решения необходимо увеличивать число членов ряда (13). Для получения дополнительных уравнений с целью определения неизвестных коэффициентов B_i будем увеличивать число точек по координате ξ, в которых следует выполнять уравнение (9). И, в частности, принимая число таких точек равным 48 (с шагом $\Delta\xi = 1/48$, начиная от точки $\xi = 0$), относительно неизвестных коэффициентов B_i получаем 49 уравнений (еще одно уравнение добавляется в результате выполнения граничного условия (12)). После определения из решения этой системы уравнений неизвестных B_i $\left(i = \overline{1, 49}\right)$ дальнейший ход решения повторяется.

В таблице приведены полученные для данного количества членов ряда (13) первые 17 собственных чисел в сравнении с точными их значениями. В этой же таблице приведены значения коэффициентов A_k $\left(k = \overline{1, 17}\right)$, найденные из выполнения начального условия (4) в 17 точках переменной ξ. И, в частности, условие (4) выполнялось с шагом по координате ξ $\Delta\xi = 1/48$ начиная с точки $\xi = 0$. Отметим, что ввиду плохой обусловленности матрицы коэффициентов системы алгебраических линейных уравнений, являющейся заполненной квадратной матрицей с большим разбросом коэффициентов по абсолютной величине, ее решение для получения как можно большей точности выполнялось методом итераций.

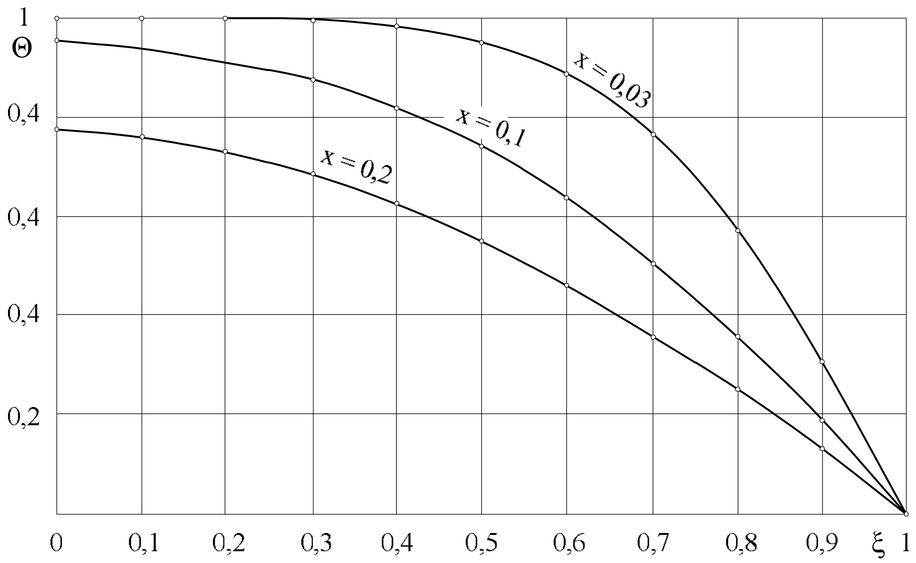

Рис. 1. Графики изменения температуры в пластине:
—— – расчет по формуле (20) (третье приближение); ○ – точное решение

Расчетные значения собственных чисел в сравнении с точными

Номер собственных чисел ν_k и коэффициентов A_k $(k=\overline{1,17})$	Расчетные значения ν_k $(k=\overline{1,17})$ при 49 членах ряда (13)	Точные значения собственных чисел ν_k $(k=\overline{1,17})$	Расчетные значения A_k $(k=\overline{1,17})$ при 49 членах ряда (13)	Точные значения коэффициентов A_k $(k=\overline{1,17})$
1	2,4674011003	2,4674011003	1,2722175645	1,2732395447
2	22,2066099025	22,2066099025	–0,4213383287	–0,4244131816
3	61,6850275068	61,6850275068	0,2495131649	0,2546479089
4	120,902653913	120,902653913	–0,1746716643	–0,1818913635
5	199,859489122	199,859489122	0,1321424687	0,1414710605
6	298,555533133	298,555533133	–0,1042688938	–0,1157490495
7	416,990785946	416,990785946	0,0842665383	0,0979415034
8	555,165247561	555,165247561	–0,0689496574	–0,0848826363
9	713,078917978	713,078917978	0,0566386114	0,0748964438
10	890,731797198	890,731797198	–0,0463412842	–0,0670126076
11	1088,12388521	1088,12388522	0,0374479197	0,0606304545
12	1305,25518217	1305,25518204	–0,0295426615	–0,0553582411
13	1542,12568846	1542,12568767	0,0223389702	0,0509295818
14	1798,73507417	1798,73540209	–0,0156241657	–0,0471570202
15	2075,08408591	2075,08432532	0,0091983751	0,0439048119

16	2371,41373545	2371,17245736	–0,0712573770	–0,0410722434
17	2686,81399536	2686,99979819	0,0682304199	0,0385830165

Результаты расчетов по формуле (20) для n = 17 даны на рис. 2. Их анализ позволяет заключить, что в диапазоне числа $0{,}005 \le Fo < \infty$ расхождение с точным решением не превышает 1,0 %.

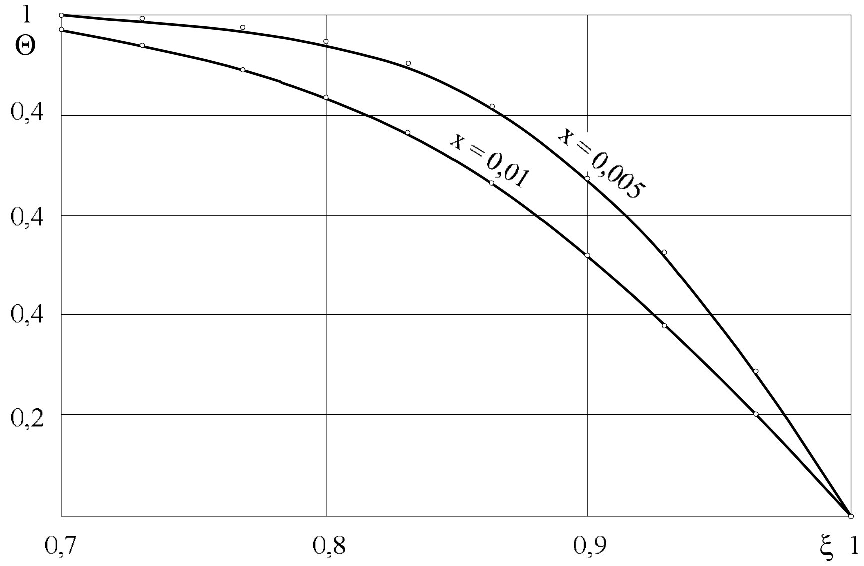

Рис. 2. Графики изменения температуры в пластине:
—— – расчет по формуле (20) (семнадцатое приближение); ○ – точное решение

Выводы

1. На основе совместного использования метода разделения переменных и ортогональных методов взвешенных невязок разработан метод получения высокоточных приближенных аналитических решений нестационарных задач теплопроводности путем непосредственного выполнения дифференциального уравнения краевой задачи Штурма – Лиувилля и начального условия в заданном количестве точек пространственной переменной.

2. Получение решения ограничивается лишь возможностью разделения переменных в исходном дифференциальном уравнении. При этом на вид дифференциального уравнения краевой задачи Штурма – Лиувилля, получаемой после разделения переменных, практически не накладывается никаких ограничений. В связи с этим метод может быть применен к задачам, не допускающим получение решений с помощью классически точных аналитических методов.

3. Получение высокоточных значений первых 17 собственных чисел (первые четыре собственные числа с точностью до 16-го знака после запятой совпадают с их точными значениями) оказалось возможным благодаря реализации в ходе решения точного выполнения дифференциального уравнения краевой задачи Штурма – Лиувилля в количестве точек пространственной переменной, равном числу определяемых собственных чисел.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В.* Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. – М.: Высшая школа, 2005. – 430 с.
2. *Кудинов В.А., Карташов Э.М., Стефанюк Е.В.* Техническая термодинамика и теплопередача. – М.: Юрайт, 2011. – 560 с.
3. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

Статья поступила в редакцию 12 декабря 2011 г.

METHOD OF SOLUTION OF NON-STATIONARY PROBLEMS OF HEAT CONDUCTION

A.V. Eremin, I.V. Kudinov

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The results of the development of an approximate analytical method of the solution of the non-stationary problems of the heat conduction are considered in the paper. The method is based on the collective use of the method of separating of the variable and orthogonal methods of the weighted residuals. The high accuracy of the eigenvalues obtained from the boundary problem of Sturm-Liouville solution is noted. For example, finding the first 17th eigenvalues, the fist four eigenvalues with the accuracy up to the 16th decimal concur with their exact values, and the last one, the 17th, concurs with the accuracy up to the first decimal. The high accuracy of the eigenvalues is explained by the fact that due to the given method of solving the differential equation of the boundary problem of Sturm-Liouville satisfies accurately in the number of points of the region that is equal to the number of the eigenvalues.

Keywords: *Sturm – Liouville problem, analytical solution, orthogonal methods, separation of variables, satisfying the equation, eigenvalues.*

Anton V. Eremin, Postgraduate student.
Igor V. Kudinov, Postgraduate student.