

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ОСНОВЕ МОДАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ*

А.Н. Дилигенская

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: adiligenskaya@mail.ru

Рассматривается задача идентификации пространственно-временной функции внутреннего тепловыделения в обратной задаче теплопроводности, представленной на основе модального описания в виде разложения в ряд по ортогональной системе собственных функций, коэффициентами которого являются временные моды. Поиск искомого управления сводится к независимой идентификации учитываемых мод, линейная комбинация которых обеспечивает аппроксимацию заданного температурного состояния.

Ключевые слова: обратная задача теплопроводности, пространственно-временное управление по мощности внутреннего тепловыделения, разложение функций в бесконечный ряд, ортогональная система собственных функций краевой задачи.

Введение. Методология решения обратных задач теплопроводности наряду с использованием экспериментальных методов исследования теплофизических процессов все чаще применяет средства математического моделирования и идентификации, позволяющие получить максимально полную информацию о рассматриваемых процессах, определить теплофизические и геометрические характеристики объекта, идентифицировать начальные и граничные условия, уточнить математическую модель объекта по косвенным их проявлениям [1].

Содержательная постановка задачи восстановления ненаблюдаемого пространственно-временного воздействия, определяемого конструктивными, технологическими и теплофизическими параметрами объекта, сводится к поиску таких управляющих воздействий, принадлежащих допустимому классу функций, которые обеспечивают при некотором начальном состоянии получение заданных экспериментальных температурных зависимостей для всех контролируемых точек в пределах рассматриваемого фиксированного временного интервала с допустимыми значениями качественных показателей [2].

Использование приближенного описания объектов с распределенными параметрами (ОРП) в виде многосвязной сосредоточенной системы и решение задач идентификации с применением теории систем с сосредоточенными параметрами может привести к потере качественных свойств, присущих пространственно распределенному управлению и функции состояния ОРП.

При необходимости восстановления распределенного воздействия во всей пространственной области его определения принципиальные особенности ОРП проявляются в полной мере, и использовать методы исследования систем с сосредоточен-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-08-00277).

ными параметрами зачастую не удается.

Наиболее общие и универсальные методики идентификации процессов теплообмена основаны на процедуре итерационной регуляризации сформулированных некорректных обратных задач теплопроводности [2], применение которой увеличивает сложность задачи при обеспечении допустимой погрешности аппроксимации точного решения.

Некорректные задачи теплопроводности можно решать без применения методов регуляризации, приводя их к условно-корректным задачам. Такая постановка может быть получена при разложении экспериментальных функций в бесконечные ряды, и последующее использование при практических расчетах аппроксимации в виде усеченного ряда приводит к решению систем алгебраических уравнений.

В статье для сохранения особенностей распределенности управляющего воздействия по пространственной и временной координатам предлагается использовать аналитическое решение обратной задачи теплопроводности при применении приближенного способа модального описания функции состояния ОРП и управляющего воздействия в форме конечного ряда по ортогональной системе функций пространственных координат с временными модами в роли его коэффициентов [3, 4, 5].

Постановка обратной задачи теплопроводности. Рассматривается модель нестационарного процесса теплопроводности с внутренним тепловыделением, заданная линейным одномерным неоднородным уравнением Фурье в относительных единицах при краевых условиях третьего рода:

$$\frac{\partial \theta(x, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \theta(x, \varphi)}{\partial x^2} + F(x, \varphi), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \varphi \leq \varphi^0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta(1, \varphi)}{\partial x} + Bi\theta(1, \varphi) = 0, \quad \frac{\partial \theta(0, \varphi)}{\partial x} = 0, \quad \varphi \in [0, \varphi^0]; \quad \theta(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1]. \quad (2)$$

Здесь $\theta(x, \varphi)$ – температурное поле, зависящее от безразмерного времени (число Фурье) φ и пространственной координаты $x \in [0, 1]$; Bi – безразмерный критерий Био, определяющий уровень тепловых потерь с поверхности нагреваемого тела; $F(x, \varphi)$ – пространственно-временное управление по мощности внутреннего тепловыделения, подлежащее определению.

Полагается, что функция состояния объекта $\theta(x, \varphi)$ оценивается с некоторой точностью с помощью конечного числа N наблюдающих устройств по области изменения пространственной координаты $x \in [0, 1]$. В результате получены температурные зависимости $\theta_i^*(\varphi) = \theta(x_i^*, \varphi)$ в некоторых фиксированных точках x_i^* , $i = \overline{1, N}$.

Требуется восстановить пространственно-временное воздействие $F(x, \varphi)$, подчиненное ограничению

$$F(x, \varphi) \in V, \quad \varphi > 0; \quad x \in [0, 1] \quad (3)$$

принадлежности заданному множеству V соответствующих управляющих воздействий, минимизирующее отклонение от заданных зависимостей $\theta_i^*(\varphi)$ точного ре-

шения $\theta(x_i^*, \varphi)$ краевой задачи (1), (2), соответствующего искомым функциям $F^*(x, \varphi)$.

Решение обратной задачи теплопроводности. Задачу идентификации будем рассматривать как поиск управляющего воздействия $F(x, \varphi)$, при использовании которого результирующая пространственно распределенная функция $\theta(x, \varphi)$ аппроксимирует конечное число N экспериментальных температурных зависимостей $\theta(x_i^*, \varphi)$. При этом получение полной информации о состоянии бесконечномерного ОРП в принципе невозможно и результат измерения совокупности N зависимостей температур $\theta^*(\varphi) = \{\theta(x_i^*, \varphi)\} = [\theta(x_1^*, \varphi) \quad \theta(x_2^*, \varphi) \quad \dots \quad \theta(x_N^*, \varphi)]^T$ всегда отличается от истинного значения $\theta(x, \varphi)$.

Для поиска $F(x, \varphi)$ представим функцию $\theta(x, \varphi)$ в виде ее разложения в бесконечный сходящийся в среднем [5] ряд по полной ортогональной системе собственных функций $\{\phi_n(\mu_n, x)\} = \{\cos(\mu_n x)\}$ краевой задачи (задачи Штурма – Луивилля). На основе использования метода разделения переменных каждый член полученного ряда представляет собой произведение двух функций одной переменной – времени или пространственной координаты:

$$\theta(x, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi) \phi_n(\mu_n, x). \quad (4)$$

При известных собственных числах μ_n и собственных функциях $\phi_n(\mu_n, x)$, определяемых лишь внутренней структурой объекта, температура $\theta(x, \varphi)$ задается коэффициентами ряда Фурье $\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)$, для нахождения которых можно использовать экспериментальные значения $\theta_i^*(\varphi)$.

Для этого составляется система независимых алгебраических векторных уравнений, аппроксимирующих экспериментальные температурные зависимости $\theta_i^*(\varphi)$ в контролируемых точках x_i^* , $i = \overline{1, N}$ в каждый момент времени $\varphi = \{\varphi_j\}$, $j = \overline{1, k}$ регистрации экспериментальных данных относительно неизвестных временных мод $\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)$. Максимальное число мод $\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)$, которые могут быть учтены при приближенном описании $\theta(x_i^*, \varphi)$ в виде усеченного ряда, определяется количеством линейно независимых строк системы уравнений и, соответственно, равно числу точек контроля N

$$\theta_i^*(\varphi) \approx \sum_{n=1}^N \bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi) \phi_n(\mu_n, x_i^*), \quad i = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Ограничиваясь рассмотрением N числа составляющих ряда, полагая при этом совпадение измеренных данных с их вычисленными значениями, подставим $\theta_i^*(\varphi)$ в математическую модель объекта и запишем систему (5) в матричном виде

$$\theta^*(\varphi) = \Phi(\mu, x^*) \times \bar{\theta}(\varphi), \quad (6)$$

где строки матрицы $\Phi(\mu, x^*) = \|\phi_n(\mu_n, x_i^*)\|$ содержат значения всех $n = \overline{1, N}$ собственных функций объекта для каждой фиксированной точки x_i^* , а элементы ее столбцов рассчитаны для всех точек наблюдения x_i^* , $i = \overline{1, N}$ при зафиксированном номере n собственной функции; вектор-столбец $\bar{\theta}(\varphi)$ содержит значения временных мод $\bar{\theta}(\varphi) = \{\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)\} = \|\bar{\theta}_1(\mu_1, \varphi) \quad \bar{\theta}_2(\mu_2, \varphi) \quad \dots \quad \bar{\theta}_N(\mu_N, \varphi)\|^T$.

Определение значений любого конечного числа N временных мод $\bar{\theta}(\varphi)$ по приближенной модели ОРП (6) возможно, если объект обладает свойством наблюдаемости, для чего достаточно, чтобы пространственные координаты точек наблюдения x_i^* не являлись нулями ни одной из собственных функций краевой задачи $\phi_n(\mu_n, x)$ [6].

На основе системы уравнений (6) с помощью метода наименьших квадратов рассчитываются значения N временных мод $\bar{\theta}(\varphi) = \{\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)\}$ в каждый из фиксированных моментов времени φ_j :

$$\bar{\theta}(\varphi) = \Phi(\mu, x^*)^{-1} \times \theta^*(\varphi). \quad (7)$$

Пространственно-временное управление $u(x, \varphi) = F(x, \varphi)$ также представляется в виде разложения в ряд по собственным функциям

$$u(x, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(\mu_n, \varphi) \phi_n(\mu_n, x), \quad (8)$$

и для его поиска используется модальное описание параболического объекта (1), (2) в виде системы независимых дифференциальных уравнений первого порядка относительно N учитываемых мод $\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)}{d\varphi} &= -\mu_n^2 \bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi) + \bar{u}_n(\mu_n, \varphi), \quad n = \overline{1, N}; \\ \bar{\theta}_n(\mu_n, 0) &= \bar{\theta}_0(\mu_n) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

с автономными управлениями $\bar{u}_n(\mu_n, \varphi)$ по модам разложения $u(x, \varphi)$.

Т.о., система (9) предоставляет возможность построения N не связанных друг с другом контуров восстановления отдельных мод распределенного управляющего воздействия

$$\bar{u}_n(\mu_n, \varphi) = \mu_n^2 \bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi) + \frac{d\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)}{d\varphi}, \quad n = \overline{1, N}. \quad (10)$$

Необходимые для этого значения производных $\frac{d\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi_j)}{d\varphi}$ могут быть определены разными способами, например аппроксимацией конечными разностями для всех моментов времени φ_j , $j = \overline{1, k}$

$$\frac{d\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi_j)}{d\varphi} \approx \frac{\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi_{j+1}) - \bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi_j)}{\varphi_{j+1} - \varphi_j}. \quad (11)$$

Другой способ приближенного вычисления $\bar{u}_n(\mu_n, \varphi)$ при использовании аналоговых моделей состоит в моделировании соотношения

$$\bar{u}_n(\mu_n, \varphi) \approx \mu_n^2 \left(\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi) + \frac{1}{T_n} \frac{d\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)}{d\varphi} \right), \quad n = \overline{1, N} \quad (12)$$

на основе следующей схемы (рис. 1) при $K \gg 1$ и $T_n = \frac{1}{\mu_n^2}$.

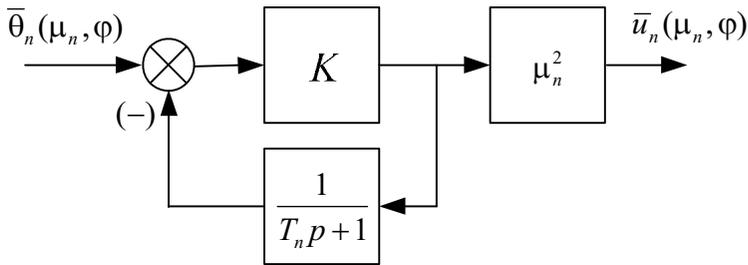


Рис. 1. Структурная схема моделирования временных мод пространственно-временного управляющего воздействия

Искомое управление $u(x, \varphi)$ восстанавливается в форме суммы N слагаемых ряда (8)

$$u(x, \varphi) \approx \sum_{n=1}^N \bar{u}_n(\mu_n, \varphi) \phi_n(\mu_n, x). \quad (13)$$

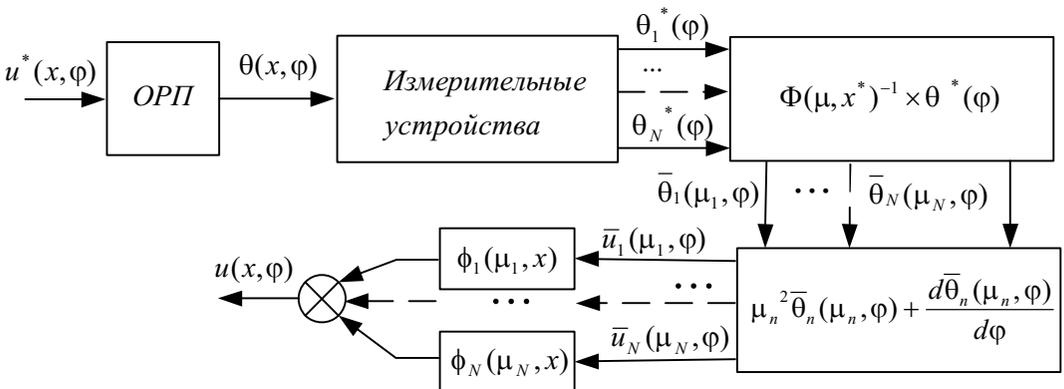


Рис. 2. Структура системы идентификации пространственно-временного управляющего воздействия параболического ОРП

Система идентификации пространственно распределенного воздействия в виде совокупности несвязанных контуров идентификации учитываемых мод управляемой величины по предварительно рассчитанным коэффициентам разложения экспери-

ментальных температурных зависимостей в ряд по собственным функциям имеет следующий вид (рис. 2).

Пример. В качестве примера рассматривалась обратная задача теплообмена при пространственно распределенном управляющем воздействии $F(x, \varphi)$ в виде произведения двух функций одной переменной

$$F(x, \varphi) = \Psi(x)\upsilon(\varphi). \quad (14)$$

Функция изменения по пространственной координате задана характерным для индукционного нагрева законом $\Psi(x) = \frac{ch(\sqrt{2}\zeta x) - \cos(\sqrt{2}\zeta x)}{sh(\sqrt{2}\zeta) - \sin(\sqrt{2}\zeta)} \sqrt{2}\zeta$, где ζ – параметр, зависящий от глубины проникновения тока в металл, а функция изменения $\upsilon(\varphi)$ во времени имеет синусоидальный характер $\upsilon(\varphi) = \sin \frac{\pi\varphi}{\varphi^0}$ $\varphi \in [0, \varphi^0]$.

Проведенные вычисления показывают, что наибольшие отклонения расчетного управления $F(x, \varphi) = u(x, \varphi) = \sum_{n=1}^N \bar{u}_n(\mu_n, \varphi) \phi_n(\mu_n, x)$ от его истинного значения $F^*(x, \varphi)$ возникают в граничных точках $x = 0 \cup 1$, а также во внутренних точках экстремумов, число которых по пространственной координате напрямую определяется числом учитываемых мод и равно $N - 1$.

Не учтенные системой идентификации моды $\bar{u}_n(\mu_n, \varphi)$, $n = \overline{N+1, \infty}$ управляющего воздействия дают некомпенсируемое отклонение полученного решения от истинного значения, определяя тем самым качество восстановления $F(x, \varphi)$.

С увеличением числа точек регистрации экспериментальных температурных кривых, а следовательно, и числа учитываемых мод N наблюдается тенденция улучшения качества аппроксимации $F(x, \varphi)$: абсолютные отклонения расчетных температур от истинных значений и абсолютная среднеквадратичная ошибка аппроксимации уменьшаются (рис. 3, а).

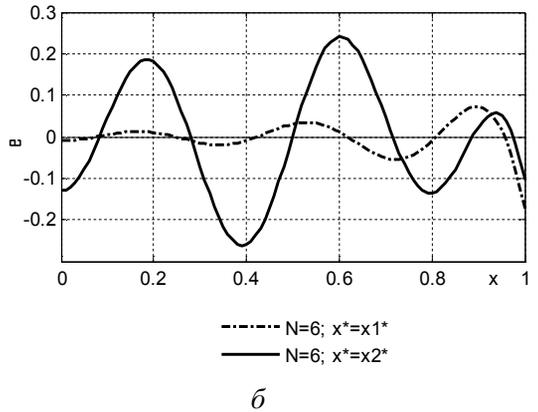
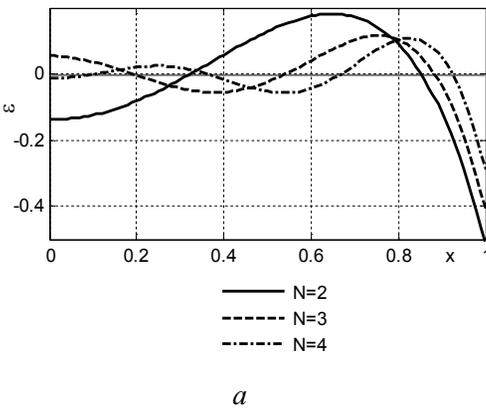


Рис. 3. Ошибка аппроксимации управляющего воздействия

$\varepsilon(x, \varphi^q) = F^*(x, \varphi^q) - F(x, \varphi^q)$ в фиксированный момент времени φ^q при восстановлении $F(x, \varphi)$ по двум, трем и четырем учитываемым модам (а); по шести модам при различном размещении точек контроля x^{1*} и x^{2*} (б)

При этом поведение расчетного воздействия $F(x, \varphi)$ с увеличением числа учитываемых мод неоднозначно, т. к. абсолютные отклонения во внутренних локальных экстремумах и в граничных точках существенно зависят от расположения точек контроля, а конкретнее, от их близости к нулям учитываемых собственных функций. Поэтому при восстановлении $F(x, \varphi)$ с фиксированным числом N мод $\bar{u}_n(\mu_n, \varphi)$ качественный характер его пространственного распределения не меняется, но максимальное отклонение $\varepsilon(x, \varphi) = \max |F^*(x, \varphi) - F(x, \varphi)|$, задающее абсолютную ошибку идентификации, может наблюдаться в разных точках внутренних экстремумов или на границах пространственной области и значительно различаться по величине. Например, при расположении $N = 6$ наблюдающих устройств в различных точках области изменения пространственной координаты $x^{1*} = (0.1; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1)^T$ и $x^{2*} = (0; 0.25; 0.5; 0.8; 0.9; 1)^T$ пространственное распределение ошибки идентификации $F(x, \varphi)$ существенно меняется (рис. 3, б). В связи с этим может быть актуальна задача оптимального расположения точек контроля, минимизирующего погрешность восстановления расчетного управляющего воздействия.

Заключение. Применение рассмотренного подхода для построения системы идентификации пространственно-временного воздействия основано на возможности независимой идентификации различных мод входного воздействия объекта, комбинация которых с заданными собственными функциями при $N < \infty$ приближенно обеспечивает заданное поведение пространственно распределенной величины.

Процесс идентификации распределенного входного воздействия сводится к независимому друг от друга определению каждой из первых N составляющих ряда (8) на основе переменных состояния, характеризующих поведение ОРП, заданное экспериментальными зависимостями, в роли которых выступают временные моды объекта. Основанием для такого решения обратной задачи теплопроводности является ортогональность собственных функций объекта.

Построение такой системы идентификации предусматривает наличие устройств вычисления временных мод объекта по результатам наблюдения текущего состояния в фиксированных точках на основе метода наименьших квадратов (7) и устройств формирования распределенного управляющего воздействия путем взвешенного суммирования с пространственно зависимыми коэффициентами, равными собственным функциям объекта.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мацевитый Ю.М.* Обратные задачи теплопроводности. В 2-х т. – Киев: Наукова думка, 2002. – 408 с.
2. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
3. *Бутковский А.Г.* Структурная теория распределенных систем. – М.: Наука, 1977.
4. *Рей У.* Методы управления технологическими процессами. – М.: Мир, 1983.
5. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2003.
6. *Рапопорт Э.Я.* Анализ и синтез систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2005.
7. *Рапопорт Э.Я., Плевшицева Ю.Э.* Специальные методы оптимизации в обратных задачах теплопроводности // Известия РАН. Энергетика. – 2002. – № 5. – С. 144-155.

Статья поступила в редакцию 6 сентября 2012 г.

ANALITICAL IDENTIFICATION OF SPATIOTEMPORAL CONTROL IN THE INVERSE THERMAL CONDUCTIVITY PROBLEMS ON THE BASIS OF MODAL DESCRIPTION

A.N. Diligenskaya

Samara State Technical University
224, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The problem of identification of the spatiotemporal function of internal heat sources in the inverse thermal conductivity problem is solved. Representation of the control action is based on the modal description in the form of the infinite expansion in terms of orthogonal system of eigenfunctions; the coefficients of this series are temporary modes. Searching for the desired control is reduced to the independent identification of restricted set of temporary modes, linear combination of which provides the approximation of the specified temperature state.

Keywords: *Inverse heat conduction problem, spatial-temporal control of internal heat sources, infinite series expansion, orthogonal system of eigenfunctions of the boundary value problem.*