

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА В УСЛОВИЯХ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТА*

И.С. Левин, Э.Я. Рапопорт

Самарский государственный технический университет

443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: levin_ilja@yahoo.com; rapoport@samgtu.ru

Рассмотрена задача синтеза системы оптимального по быстродействию управления не полностью определенными моделями объектов с распределенными параметрами. Произведен синтез оптимального по быстродействию регулятора для процесса индукционного нагрева и предложена структура идентификатора параметрических характеристик объекта управления.

Ключевые слова: *система с распределенными параметрами, индукционный нагрев, управление в условиях интервальной неопределенности, синтез оптимального регулятора.*

Постановка задачи. Типичной является ситуация, когда характеристики процесса индукционного нагрева, рассматриваемого в качестве объекта управления, определены не полностью. Это обусловлено неточным знанием его параметров и действием неконтролируемых внешних возмущений. Обычно речь идет об интервальной неопределенности неизвестных величин, информация о которых исчерпывается заданными границами диапазона изменения их возможных значений. В связи с этим возникает актуальная задача синтеза управляющих алгоритмов для подобных объектов управления.

В данной статье рассматривается задача синтеза оптимальной по быстродействию системы автоматического управления (САУ) процессом индукционного нагрева металлических полуфабрикатов под обработку давлением с неполным измерением состояния в условиях интервальной неопределенности.

Процесс индукционного нагрева металлических изделий цилиндрической формы с сосредоточенным управляющим воздействием по мощности внутреннего тепловыделения $u(t)$ можно в линейном приближении описать бесконечной системой дифференциальных уравнений для временных мод $\bar{\theta}_n(\mu_n, t)$ разложения температурного поля $\theta(x, t)$ в ряд по собственным функциям $J_0\left(\eta_n \frac{x}{R}\right)$ радиальной координаты $x \in [0, R]$ [1]:

$$\frac{d\bar{\theta}_n(\mu_n, t)}{dt} = -\mu_n^2 \bar{\theta}_n(\mu_n, t) + \frac{1}{c\gamma} \bar{F}_{bn}(\mu_n, v) u(t) + d_{1n} \theta_C(t), t \in [0, t_1], n = 1, 2, \dots; \quad (1)$$

$$\bar{\theta}_n(\mu_n, 0) = \bar{\theta}_0^{(0)}(\mu_n).$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-08-00277).

Илья Сергеевич Левин, магистрант.

Эдгар Яковлевич Рапопорт (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Автоматика и управление в технических системах».

На управляющее воздействие $u(t)$ накладывается следующее ограничение:

$$0 \leq u(t) \leq u_{\max} \quad \forall t \in [0, t_1] \quad (2)$$

Здесь R – радиус цилиндра; c, γ – удельная теплоемкость и плотность материала; $\bar{\theta}_0^{(0)}(\mu_n)$ – моды разложения заданных равномерных начальных распределений температур $\theta(x, 0) = \theta_0 = const$ в бесконечные ряды по системе собственных функций;

$\mu_n^2 = \frac{a\eta_n^2}{R^2}$ – собственные числа; $\eta_n, n = 1, 2, \dots$ – бесконечно возрастающая последовательность корней уравнения $BiJ_0(\eta) - \eta J_1(\eta) = 0$; Bi – безразмерный критерий Био, характеризующий уровень тепловых потерь с поверхности цилиндра в процессе нагрева; $J_i(\eta), i = 0, 1$ – функции Бесселя нулевого и первого порядка; d_{ln} – известные коэффициенты; $\theta(x, t)$ – температурное поле нагреваемого металлического изделия, изменяющееся во времени t и по радиальной координате x , которое описывается следующим выражением:

$$\theta(x, t) = \theta_0 + \frac{1}{c\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\bar{F}_{b1n}(\eta_n, \nu) \eta_n^2 J_0\left(\eta_n \frac{x}{R}\right)}{(\eta_n^2 + Bi^2) J_0^2(\eta_n)} \int_0^{t_1} e^{-\mu_n^2(t-\tau)} u(\tau) d\tau; \quad (3)$$

$\theta_C(t)$ – температура окружающей среды; $\bar{F}_{b1n}(\eta_n, \nu)$ – моды функции пространственного распределения по радиусу цилиндра внутренних источников тепла, определяемые по формуле

$$\bar{F}_{b1n}(\eta_n, \nu) = \int_0^1 F_{b1}(l, \nu) J_0(\eta_n l) dl, n = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $F_{b1}(l, \nu) = \nu \frac{\text{ber}'^2(\nu l) + \text{bei}'^2(\nu l)}{\text{ber } \nu \text{ber}' \nu + \text{bei } \nu \text{bei}' \nu}$; $l = \frac{x}{R}$; $\nu = R\sqrt{2\pi\mu_a f \sigma}$; f – частота питающего индуктор тока; σ – электропроводность нагреваемого материала; μ_a – абсолютная магнитная проницаемость нагреваемого материала; $\text{ber } z, \text{bei } z, \text{ber}' z, \text{bei}' z$ – функции Кельвина и их первые производные; λ – коэффициент теплопроводности.

Пусть далее начальная температура θ_0 и величина Bi критерия Био определены с точностью до принадлежности заданным интервалам их возможных значений: $\theta_0 \in [\theta_{0_{\min}}, \theta_{0_{\max}}]$; $Bi \in [Bi_{\min}, Bi_{\max}]$. Тогда вектор неопределенных факторов определяется как $y = (\theta_0, Bi) \in Y$, где Y – множество всех допустимых по указанным ограничениям комбинаций величин θ_0 и Bi .

Сформулируем задачу синтеза оптимальной по быстродействию САУ. Для ее постановки необходимо привести выражение для критерия быстродействия и задать требования к конечному состоянию объекта.

Критерий оптимального быстродействия записывается в интегральной форме:

$$I = \int_0^{t_1} dt = t_1 \rightarrow \min, \quad (5)$$

где t_1 – длительность процесса нагрева.

В случае, когда в САУ может быть получена в реальном масштабе времени достоверная информация о реализуемой в каждом конкретном случае величине

$y = \tilde{y} \in Y$ путем наблюдения за поведением управляемой величины, требования к конечному температурному состоянию $\theta(x, \tilde{y}, t_1)$ записываются в виде неравенства [1]

$$\max_{x \in [0, R]} |\theta(x, \tilde{y}, t_1) - \theta^{**}| \leq \tilde{\varepsilon}_0(\tilde{y}) \quad (6)$$

с учетом заданного в равномерной метрике допуска $\tilde{\varepsilon}_0(\tilde{y}) \leq \varepsilon_0$ на отклонение конечного температурного состояния $\theta(x, \tilde{y}, t_1)$ от заданного равномерного распределения температур $\theta^{**}(x)$ по радиусу цилиндра $\theta^{**}(x) \equiv \theta^{**} = const$.

Применительно к модальному представлению объекта требования (6) после замены температурного поля $\theta(x, \tilde{y}, t_1)$ его разложением в ряд по собственным функциям $J_0\left(\eta_n \frac{x}{R}\right)$ принимают следующий вид:

$$\max_{x \in [0, R]} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\theta}_n(\mu_n, \tilde{y}, t_1) J_0\left(\eta_n \frac{x}{R}\right) - \theta^{**} \right| \leq \tilde{\varepsilon}_0(\tilde{y}). \quad (7)$$

Теперь задача оптимального быстрогодействия может быть сформулирована следующим образом.

Необходимо найти такое программное оптимальное управление $u^*(t)$ в условиях заданных ограничений (4), которое переводит объект, описываемый бесконечной системой уравнений (1), из заданного начального в требуемое конечное состояние (7) за минимально возможное время $t_1 = t_{1\min}$ для каждой из допустимых величин $y = \tilde{y} = (\theta_0^*, Bi^*) \in Y$.

Если пренебречь инерционностью и погрешностями процедур наблюдения и идентификации, величина \tilde{y} определяется по некоторой заранее фиксируемой детерминированной зависимости $F(\theta_u(x, t))$ от результатов всегда неполного наблюдения $\theta_u(x, t)$ за текущим состоянием $\theta(x, t)$ объекта:

$$\tilde{y} = F(\theta_u(x, t)), \quad (8)$$

где $\theta_u(x, t)$ и $F(\theta_u(x, t))$ выбираются из условия минимальной сложности технической реализации САУ.

В итоге возникает задача проектирования идентификатора (8) и синтеза регулятора $u = u(\theta_u(x, t))$, обеспечивающих решение детерминированной краевой задачи (1) – (3), (7), (8) за минимально возможное время $t_{1\min}$ при некоторых зафиксированных значениях θ_0 и Bi .

Алгоритмы оптимального по быстрдействию управления в условиях интервальной неопределенности параметров объекта. Пусть теперь требуется определить алгоритм оптимального по быстрдействию управления с обратными связями, обеспечивающий решение задачи оптимизации (1) – (3), (7), (8) для каждого из допустимых значений $y = \tilde{y} \in Y$. Для этого сначала рассмотрим детерминированную задачу синтеза оптимальной по быстрдействию САУ (1) – (3), (7), (8) для любого заранее фиксируемого значения $y = \tilde{y} \in Y$.

Синтез оптимального регулятора по общему методу фазового пространства приводит к технически нереализуемому алгоритму релейного управления [2]

$$u^*(\bar{\theta}) = \frac{u_{\max}}{2} \cdot [1 \pm \text{sign} h(\bar{\theta})] \bar{\theta} = (\bar{\theta}_n), n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

с обратными связями по всем координатам вектора $\bar{\theta}$ и гиперповерхностью переключения $h(\bar{\theta}) = 0$, определение которой в бесконечном пространстве $\bar{\theta}_n$ представляет собой практически невыполнимую задачу.

Переход к вполне реализуемой структуре замкнутой системы с неполным изменением функции $\theta(\tilde{x}_j, t) = \theta_j(t)$, $j = \overline{1, N}$ состояния объекта в некоторых N точках $\tilde{x}_j \in [0, R]$ пространственной области ее распределения выполняется путем выбора другой функции переключения $h_1(\bar{\theta}, \tilde{y})$ в форме линейной комбинации N сигналов обратной связи по измеряемым величинам $\theta_j(t)$, $\theta_j(t_1) = \theta_j^T(\tilde{y})$ с коэффициентами передачи $\rho_j(\tilde{y})$ [2]:

$$h_1(\bar{\theta}, \tilde{y}) = \sum_{j=1}^N \rho_j(\tilde{y})(\theta_j^T(\tilde{y}) - \theta_j(t)). \quad (10)$$

При выборе в качестве $\rho_j(\tilde{y})$ нетривиальных решений однородной системы $N - 1$ линейных уравнений с N неизвестными

$$\sum_{j=1}^N \rho_j(\tilde{y})(\theta_j^T(\tilde{y}) - \theta_j(\tilde{t}_m)) = 0, m = \overline{1, N-1}, \quad (11)$$

где \tilde{t}_m , $m = \overline{1, N-1}$ – расчетные моменты времени переключения оптимальной программы $u^*(t)$ релейной формы с N интервалами постоянства длительностью Δ_i^0 , $i = \overline{1, N}$, определяемые вместе с $\theta_j(\tilde{t}_m)$ и $\theta_j^T(\tilde{y})$ для заданной величины $\tilde{\varepsilon}_0(\tilde{y})$ при расчете $u^*(t)$ альтернативным методом [2], функция $h_1(\bar{\theta}, \tilde{y})$ в (10) меняет знак при переходе через нуль вместе с $h(\bar{\theta})$ в расчетные моменты времени \tilde{t}_m , и только в эти моменты, в силу чебышевских свойств функции $h_1(\bar{\theta}, \tilde{y})$ [2].

Полагаем, что для $\tilde{\varepsilon}_0(\tilde{y})$ в (7) $N = \text{const} \forall \tilde{y} \in Y$ и определяется в соответствии с правилом [2]

$$\varepsilon_{\min}^{(1)} > \varepsilon_{\min}^{(2)} > \dots > \varepsilon_{\min}^{(j)} > \varepsilon_{\min}^{(j+1)} > \dots > \varepsilon_{\min}^{(s)} = \varepsilon_{\inf} \geq 0, j = \overline{1, s}; \quad (12)$$

$$N = \nu \forall \varepsilon_0 : \varepsilon_{\min}^{(\nu)} \leq \tilde{\varepsilon}_0(\tilde{y}) < \varepsilon_{\min}^{(\nu-1)}, \nu \in \{\overline{1, s}\};$$

где $\varepsilon_{\min}^{(j)}$ – минимально допустимая величина $\tilde{\varepsilon}_0(\tilde{y})$ в (7) в классе релейных управлений $u(t)$ с j интервалами постоянства.

Таким образом, алгоритм управления в детерминированной задаче быстрого действия имеет следующий вид:

$$u^*(\bar{\theta}) = \frac{u_{\max}}{2} \cdot [1 \pm \text{sign} h_1(\bar{\theta}, \tilde{y})] \quad (13)$$

Как уже было отмечено выше, для построения замкнутой системы оптимального по быстрдействию управления с регулятором (10), (11), (13) в условиях интервальной неопределенности $y \in Y$ необходимо дополнить ее структуру идентификатором (8) реализуемых величин \tilde{y} по результатам наблюдения текущего состояния

$\theta_u(x, t) = \theta(\bar{x}_j, t) = \bar{\theta}_j(t)$ в некоторых r точках $\bar{x}_j \in [0, R]$, $j = \overline{1, r}$, частично или полностью совпадающего с измеряемыми величинами $\theta_j(x, t)$ в (25) – (27):

$$\bar{\theta}_j(t) = \theta_j(t), j = \overline{1, r}; p = \min\{N, r\}. \quad (14)$$

Интегрирование уравнений (1) в некоторый заданный момент времени $t_\Phi \in (0, \Delta_1^0)$ позволяет найти в форме (3) зависимости $g_j(\tilde{y}, t_\Phi)$ величин $\bar{\theta}_j(t_\Phi)$, $j = \overline{1, r}$, от \tilde{y} .

Тогда при r неопределенных факторах $(\tilde{y}^{(m)})$, $m = \overline{1, r}$; $\tilde{y} = (\tilde{y}^{(m)})$ система равенств

$$\bar{\theta}_j(t_\Phi) = g_j(\tilde{y}^{(1)}, \tilde{y}^{(2)}, \dots, \tilde{y}^{(r)}, t_\Phi), j = \overline{1, r}, \tilde{y} \in Y \quad (15)$$

определяет реализуемые значения \tilde{y} в окрестности некоторой номинальной точки $\tilde{y} = y_H$ как неявно заданные, однозначные, непрерывные и непрерывно дифференцируемые по всем аргументам функции

$$\tilde{y}^{(m)} = F_m(\bar{\theta}_1(t_\Phi), \bar{\theta}_2(t_\Phi), \dots, \bar{\theta}_r(t_\Phi)), m = \overline{1, r} \quad (16)$$

от наблюдаемых переменных $\bar{\theta}_j(t_\Phi)$ при условии, что якобиан системы (15)

$$J = \frac{D(g_1^*, \dots, g_r^*)}{D(\tilde{y}^{(1)}, \dots, \tilde{y}^{(r)})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1^*}{\partial \tilde{y}^{(1)}} & \frac{\partial g_1^*}{\partial \tilde{y}^{(2)}} & \dots & \frac{\partial g_1^*}{\partial \tilde{y}^{(r)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_r^*}{\partial \tilde{y}^{(1)}} & \frac{\partial g_r^*}{\partial \tilde{y}^{(2)}} & \dots & \frac{\partial g_r^*}{\partial \tilde{y}^{(r)}} \end{vmatrix} \quad (17)$$

не равен нулю в точке $\tilde{y} = y_H$ [3]. Здесь

$$g_j^*(\tilde{y}^{(1)}, \dots, \tilde{y}^{(r)}, \bar{\theta}_1(t_\Phi), \dots, \bar{\theta}_r(t_\Phi)) = g_j(\tilde{y}^{(1)}, \dots, \tilde{y}^{(r)}) - \bar{\theta}_j(t_\Phi). \quad (18)$$

Воспользовавшись известными правилами дифференцирования неявно заданных функций [4], можно заранее вычислить производные $\frac{\partial \tilde{y}^{(m)}}{\partial \bar{\theta}_j^k}$, $k \geq 1$ в точке

$\tilde{y} = y_H$, $\bar{\theta}_{jH} = \bar{\theta}_j(y_H, t_\Phi)$, $j = \overline{1, r}$:

$$\left(\frac{\partial \tilde{y}^{(m)}}{\partial \bar{\theta}_j^k} \right)_{\tilde{y}=y_H} = - \left[\frac{1}{J} \cdot \frac{D(g_1^*, \dots, g_r^*)}{D(\tilde{y}^{(1)}, \dots, \tilde{y}^{(m-1)}, \bar{\theta}_j, \tilde{y}^{(m+1)}, \dots, \tilde{y}^{(r)})} \right]_{\tilde{y}=y_H}. \quad (19)$$

Аналогичным образом могут быть вычислены и производные высшего порядка.

Функция F в уравнении идентификатора (8) определяется по значениям

$\left(\frac{\partial^k \tilde{y}^{(m)}}{\partial \bar{\theta}_j^k} \right)_{\tilde{y}=y_H}$, $k = \overline{1, s}$ с требуемой точностью, фиксируемой числом $s \geq 1$, путем ее

разложения в ряд Тейлора по степеням $\bar{\theta}_j$ [3]. Для случая $s = 1$, которым ограничиваются в типичных ситуациях, равенства (16) можно представить в линейном приближении в виде суммы сигналов линейных обратных связей по наблюдаемым переменным $\bar{\theta}_j(t_\Phi)$ с вычисленными по (19) коэффициентами передачи α_{mj} :

$$\tilde{y}^{(m)} = \tilde{y}_H^{(m)} + \sum_{j=1}^r \alpha_{mj} (\bar{\theta}_j(t_\Phi) - \bar{\theta}_{jH}) \quad (20)$$

$$\alpha_{mj} = \left(\frac{\partial \tilde{y}^{(m)}}{\partial \bar{\theta}_j} \right)_{\tilde{y}=y_H} ; \bar{\theta}_{jH} = g_j(y_H, t_\Phi), m = \overline{1, r}.$$

Аналогично по известным зависимостям $\rho_i(\tilde{y}), i = \overline{1, N}$, которые определяются предварительным решением системы уравнений (11) для различных $\tilde{y} \in Y$, находят-ся их линейные приближения:

$$\rho_i(\tilde{y}) = \rho_i(y_H) + \sum_{j=1}^r \beta_{mi} (\tilde{y}^{(m)} - \tilde{y}_H^{(m)}) \quad (21)$$

$$\beta_{mi} = \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial \tilde{y}^{(m)}} \right)_{\tilde{y}=y_H} ; i = \overline{1, N}.$$

С учетом (20), (21) получаем линейные приближения алгоритма автоматической коррекции коэффициентов обратных связей и определяемых подобным образом заданных конечных значений θ_j^T измеряемых величин $\tilde{\theta}_j(t)$:

$$\rho_i(\tilde{y}) = \rho_i(y_H) + \sum_{j=1}^r \gamma_{ij} (\bar{\theta}_j(t_\Phi) - \bar{\theta}_{jH}) \quad (22)$$

$$\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^N \alpha_{mj} \beta_{mi} ; i = \overline{1, N};$$

$$\theta_i^T(\tilde{y}) = \theta_i^T(y_H) + \sum_{j=1}^r \gamma_{ij}^* (\bar{\theta}_j(t_\Phi) - \bar{\theta}_{jH}) \quad (23)$$

$$\gamma_{ij}^* = \sum_{m=1}^N \alpha_{mj} \beta_{mi}^* ; \beta_{mi}^* = \left(\frac{\partial \theta_i^T}{\partial \tilde{y}^{(m)}} \right)_{\tilde{y}=y_H} ; i = \overline{1, N}.$$

Таким образом, структурно-параметрический синтез замкнутой системы оптимального по быстродействию управления процессом индукционного нагрева при неполном измерении состояния в условиях интервальной неопределенности параметров объекта $y \in Y$ определяется алгоритмом управления (10), (11), (13) с автоматически определяемыми идентификатором (20) – (23) коэффициентами обратных связей и конечными значениями контролируемых температур при априори фиксируемых коэффициентах $\gamma_{ij}, \gamma_{ij}^*$. При этом величины $\rho_i(y_H), \theta_i^T(y_H), \bar{\theta}_{jH}$ предвари-тельно определяются при расчете программного управления альтернансным мето-дом для случая $y = y_H$.

Оптимальное управление процессом индукционного нагрева. В качестве ти-пичного примера рассмотрим задачу синтеза оптимальной по быстродействию сис-темы управления процессом индукционного нагрева металлических изделий цилин-дрической формы, математическая модель которого представлена уравнениями (1) – (4).

Пусть в соответствии с требованиями (7) к конечному температурному состоянию требуется обеспечить равномерный нагрев тела до заданной температуры $\theta^{**} = const$ с предельно достижимой в классе оптимальных по быстродействию двухинтервальных управляющих воздействий $u(t)$ релейной формы (рис. 1) абсолютной точностью $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ за минимально возможное время $t_1 = t_{1\min}$ при равномерно распределенной начальной температуре $\theta_0(x) = \theta_0 = const < \theta^{**}$ в условиях интервальной неопределенности по величинам θ_0 и Bi .

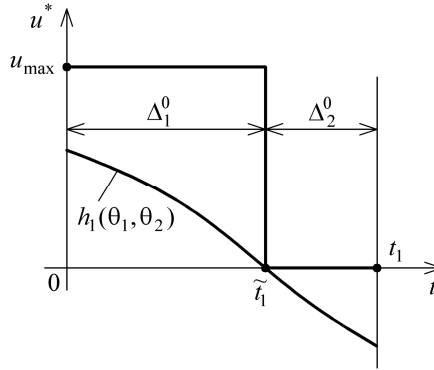


Рис. 1. Оптимальное по быстродействию двухинтервальное управление по мощности внутренних источников тепла

В условиях полной информации о значениях параметров объекта функция переключения (10) в данном случае формируется при $r = N = 2$ интервалах постоянства оптимального управления с сигналами обратной связи по температуре в точках \tilde{x}_1 и \tilde{x}_2 по радиусу цилиндра, в качестве которых удобно принять точки $\tilde{x}_1 = R$ и $\tilde{x}_2 = 0$, где результирующие значения температур θ_1^T и θ_2^T в конце оптимального процесса независимо от начальной температуры будут равны минимально допустимым величинам $\theta^{**} - \varepsilon_{\min}^{(2)}$, что вытекает из альтернансных соотношений для $\theta(x, \Delta^0)$ [1, 2]. В таком случае $\theta_j(t) = \bar{\theta}_j(t), j = r = N = 2$ в (14) и $\theta_1(t) = \theta(R, t); \theta_2(t) = \theta(0, t)$. Положим для определенности $\rho_1 = 1$, тогда функция переключения примет следующий вид:

$$h_1(\theta_1, \theta_2) = \theta^{**} - \varepsilon_{\min}^{(2)} - \theta(R, t) + \rho_2 (\theta^{**} - \varepsilon_{\min}^{(2)} - \theta(0, t)) \quad (24)$$

В соответствии с (13) алгоритм оптимального управления с обратной связью определяется выражением

$$u^* = \frac{u_{\max}}{2} \left[1 + \text{sign} \left(\theta^{**} - \varepsilon_{\min}^{(2)} - \theta(R, t) + \rho_2 (\theta^{**} - \varepsilon_{\min}^{(2)} - \theta(0, t)) \right) \right], \quad (25)$$

где коэффициент ρ_2 обратной связи определяется известным способом по результатам расчета программного управления альтернансным методом.

Как было отмечено ранее, для построения замкнутой системы оптимального по быстродействию управления с алгоритмом управления (25) в условиях интервальной неопределенности требуется дополнить ее структуру идентификатором реализуемых величин \tilde{y} , где в данном случае $\tilde{y} = (\tilde{y}^{(1)}, \tilde{y}^{(2)})$, $\tilde{y}^{(1)} = \theta_0$; $\tilde{y}^{(2)} = Bi$.

Тогда выражение (16) для реализуемых значений \tilde{y} примет вид

$$\tilde{y}^{(m)} = F_m(\bar{\theta}_1(t_\Phi), \bar{\theta}_2(t_\Phi)), m = 1, 2, \quad (26)$$

где $\bar{\theta}_1(t_\Phi)$ и $\bar{\theta}_2(t_\Phi)$ определяются по известным решениям уравнения объекта при $u(t) = u_{\max}$, $t = t_\Phi$ [1,2]:

$$\theta_1(t_\Phi) = \theta(R, \Delta_1^0) = \theta_0 + \frac{u_{\max} R^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\bar{F}_{b1n}(\eta_n, \nu)}{(\eta_n^2 + Bi^2) J_0(\eta_n)} \left(1 - e^{-\mu_n^2 t_\Phi}\right); \quad (27)$$

$$\theta_2(t_\Phi) = \theta(0, \Delta_1^0) = \theta_0 + \frac{u_{\max} R^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\bar{F}_{b1n}(\eta_n, \nu)}{(\eta_n^2 + Bi^2) J_0^2(\eta_n)} \left(1 - e^{-\mu_n^2 t_\Phi}\right). \quad (28)$$

Якобиан (17) системы (15) принимает теперь следующий вид:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \tilde{y}^{(1)}} & \frac{\partial g_1}{\partial \tilde{y}^{(2)}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \tilde{y}^{(1)}} & \frac{\partial g_2}{\partial \tilde{y}^{(2)}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial Q_0} & \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial Bi} \\ \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial Q_0} & \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial Bi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial Bi} \\ 1 & \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial Bi} \end{vmatrix} = \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial Bi} - \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial Bi}, \quad (29)$$

где $\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial Bi}$ и $\frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial Bi}$ находятся путем дифференцирования выражений (27), (28) и имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial Bi} = \frac{2u_{\max} R^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G \cdot s - \bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi), \nu)}{z^2} \left[m'_1 \cdot s - e^{-\mu_n^2 t_\Phi} t_\Phi \frac{d\mu_n^2}{dBi} \cdot z \right]; \quad (30)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial Bi} = \frac{2u_{\max} R^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G J_0(\eta_n(Bi)) s - \bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi), \nu)}{z^2 \cdot J_0^2(\eta_n(Bi))} \left[m'_2 \cdot s - e^{-\mu_n^2 t_\Phi} t_\Phi \frac{d\mu_n^2}{dBi} z^2 \right]. \quad (31)$$

Здесь

$$G = \frac{\partial \bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi), \nu)}{\partial Bi} z; \quad z = (\eta_n^2(Bi) + Bi^2) J_0(\eta_n(Bi)); \quad s = \left(1 - e^{-\mu_n^2 t_\Phi}\right);$$

$$\frac{d\mu_n^2}{dBi} = \frac{2a}{R^2} \eta_n(Bi) \frac{d\eta_n}{dBi}; \quad \frac{\partial \bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi), \nu)}{\partial Bi} = \int_0^1 F_{b1}(l, \nu) (-l^2) J_1(\eta_n(Bi) l) \frac{d\eta_n}{dBi} dl;$$

$$m'_1 = 2J_0(\eta_n(Bi)) \left(Bi + \eta_n(Bi) \frac{\partial \eta_n(Bi)}{\partial Bi} \right) - J_1(\eta_n(Bi)) \frac{\partial \eta_n(Bi)}{\partial Bi} (\eta_n^2(Bi) + Bi^2);$$

$$m'_2 = 2J_0^2(\eta_n(Bi)) \left(\eta_n(Bi) \frac{\partial \eta_n(Bi)}{\partial Bi} + Bi \right) - z \left[2J_1(\eta_n(Bi)) \frac{\partial \eta_n(Bi)}{\partial Bi} \right].$$

Определим теперь коэффициенты передачи α_{mj} в (20). Согласно (19), (29) – (31) получаем следующие выражения:

$$\alpha_{11} = \frac{\tilde{y}^{(1)}}{\partial \bar{\theta}_1} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1^*}{\partial \bar{\theta}_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \tilde{y}^{(2)}} \\ \frac{\partial g_2^*}{\partial \bar{\theta}_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \tilde{y}^{(2)}} \end{vmatrix} = \frac{1}{J} \frac{\partial g_2}{\partial \tilde{y}^{(2)}} = 1 - \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial Bi} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1}{N_1}; \quad (32)$$

здесь

$$M_1 = s \left[G J_0(\eta_n(Bi)) - \bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi), \nu) \cdot m'_2 \right] - \bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi), \nu) J_0(\eta_n(Bi)) \frac{d\mu_n^2}{dBi} z e^{-\mu_n^2 t_\Phi} t_\Phi;$$

$$N_1 = s \left(G - \bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi), \nu) \cdot m'_1 \right) J_0^2(\eta_n(Bi)) - \bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi), \nu) \frac{d\mu_n^2}{dBi} z e^{-\mu_n^2 t_\Phi} t_\Phi J_0^2(\eta_n(Bi));$$

$$\alpha_{12} = \frac{\tilde{\gamma}^{(1)}}{\partial \bar{\theta}_2} = -\frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1^*}{\partial \bar{\theta}_2} & \frac{\partial g_1}{\partial \tilde{\gamma}^{(2)}} \\ \frac{\partial g_2^*}{\partial \bar{\theta}_2} & \frac{\partial g_2}{\partial \tilde{\gamma}^{(2)}} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \frac{\partial g_1}{\partial \tilde{\gamma}^{(2)}} = 1 - \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_2}{N_2}, \quad (33)$$

здесь

$$M_2 = s \left[G - \bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi), \nu) \cdot m'_1 \right] J_0^2(\eta_n(Bi)) - \bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi), \nu) J_0^2(\eta_n(Bi)) \frac{d\mu_n^2}{dBi} z e^{-\mu_n^2 t_\Phi} t_\Phi;$$

$$N_2 = s \left(G J_0(\eta_n(Bi)) - \bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi), \nu) \cdot m'_2 \right) - \bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi), \nu) e^{-\mu_n^2 t_\Phi} t_\Phi J_0(\eta_n(Bi)) z \frac{d\mu_n^2}{dBi};$$

$$\alpha_{21} = \frac{\tilde{\gamma}^{(2)}}{\partial \bar{\theta}_1} = -\frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \tilde{\gamma}^{(1)}} & \frac{\partial g_1^*}{\partial \bar{\theta}_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \tilde{\gamma}^{(1)}} & \frac{\partial g_2^*}{\partial \bar{\theta}_1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{J} \frac{\partial g_2}{\partial \tilde{\gamma}^{(1)}} = -\frac{1}{\frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial Bi} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial Bi}} = -\frac{\lambda}{2u_{\max} R^2} \times$$

$$\times \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_3 + N_4}{z^2 \cdot J_0^2(\eta_n(Bi))}};$$

здесь

$$N_3 = s \left[G \left(1 - J_0(\eta_n(Bi)) \right) J_0(\eta_n(Bi)) - \bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi), \nu) \left(m'_2 - m'_1 \cdot J_0(\eta_n(Bi)) \right) \right];$$

$$N_4 = \bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi), \nu) e^{-\mu_n^2 t_\Phi} t_\Phi \frac{d\mu_n^2}{dBi} z \left[J_0(\eta_n(Bi)) - 1 \right] J_0(\eta_n(Bi))$$

$$\alpha_{22} = \frac{\tilde{\gamma}^{(2)}}{\partial \bar{\theta}_2} = -\frac{\tilde{\gamma}^{(2)}}{\partial \bar{\theta}_1} = \frac{1}{\frac{2u_{\max} R^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_3 + N_4}{z^2 \cdot J_0^2(\eta_n(Bi))}}. \quad (35)$$

Все производные в (30) – (35) рассчитываются в номинальной точке $y_H = (\theta_0^*, Bi^*)$ по зависимостям (27), (28).

Найти аналитические выражения для коэффициентов β_{mi} и β_{mi}^* в (22), (23) не представляется возможным ввиду их сложной и неявной зависимости от параметров θ_0, Bi . Значения этих коэффициентов приближенно вычисляются для конкретных исходных данных процесса индукционного нагрева как приращение значения функции к приращению ее аргумента:

$$\beta_{mi} = \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial \tilde{\gamma}^{(m)}} \right)_{\tilde{\gamma}=y_H} \cong \frac{\Delta \rho_i}{\Delta \tilde{\gamma}^{(m)}}; \quad m=1,2; \quad (36)$$

$$\beta_{mi}^* = \left(\frac{\partial \theta_i^T}{\partial \tilde{y}^{(m)}} \right)_{\tilde{y}=y_H} \cong \frac{\Delta \theta_i^T}{\Delta \tilde{y}^{(m)}}; m = 1, 2 \quad (37)$$

при достаточно малых значениях $\Delta \tilde{y}^{(m)}$.

Линейные приближения алгоритма идентификации (20) по результатам неполного наблюдения примут вид

$$\tilde{y}^{(m)} = \tilde{y}_H^{(m)} + \sum_{j=1}^2 \alpha_{mj} (\bar{\theta}_j(t_\Phi) - \bar{\theta}_{jH}); \alpha_{mj} = \left(\frac{\partial \tilde{y}^{(m)}}{\partial \bar{\theta}_j} \right)_{\tilde{y}=y_H}; m = 1, 2. \quad (38)$$

Линейные приближения алгоритма автоматической коррекции коэффициентов обратных связей и заданных распределений температурного поля $\theta_j^T(\tilde{y})$ в структуре функции переключения по результатам неполного наблюдения с учетом (22), (23) определяются по выражениям:

$$\rho_i(\tilde{y}) = \rho_i(y_H) + \sum_{j=1}^2 \gamma_{ij} (\bar{\theta}_j(t_\Phi) - \bar{\theta}_{jH}); i = 1, 2; \quad (39)$$

$$\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^2 \alpha_{mj} \beta_{mi}; \beta_{mi} = \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial \tilde{y}^{(m)}} \right)_{\tilde{y}=y_H};$$

$$\theta_i^T(\tilde{y}) = \theta_i^T(y_H) + \sum_{j=1}^2 \gamma_{ij}^* (\bar{\theta}_j(t_\Phi) - \bar{\theta}_{jH}); i = 1, 2; \quad (40)$$

$$\gamma_{ij}^* = \sum_{m=1}^2 \alpha_{mj} \beta_{mi}^*; \beta_{mi}^* = \left(\frac{\partial \theta_i^T}{\partial \tilde{y}^{(m)}} \right)_{\tilde{y}=y_H}.$$

Здесь $\bar{\theta}_{jH}, j = 1, 2$ находится по (27), (28) в окрестности номинальной точки $y_H = (\theta_0^*, Bi^*)$.

Для исходных номинальных данных $v = 5; Bi = 0,04; \theta^{**} = 460 \text{ }^\circ\text{C}; R = 0,08 \text{ м}; \frac{\theta_0 - \theta^{**}}{P_{\max} R^2 / \lambda} = -2,0; \lambda = 130 \text{ Вт/(м} \cdot \text{ }^\circ\text{C)}; P_{\max} = 1,625 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}$ получены следующие

значения коэффициентов в (38) – (40):

$$\alpha_{11} = -0,019; \alpha_{12} = 0,019; \alpha_{21} = 27,105; \alpha_{22} = -27,105;$$

$$\beta_{11} = \beta_{21} = 0; \beta_{12} = -0,11; \beta_{22} = 5,5;$$

$$\gamma_{11} = \gamma_{12} = 0; \gamma_{21} = 149,082; \gamma_{22} = -149,082;$$

$$\gamma_{11}^* = -57,445; \gamma_{12}^* = 57,445; \gamma_{21}^* = -59,814; \gamma_{22}^* = 59,814.$$

Алгоритм оптимального по быстродействию управления в рассматриваемых условиях интервальной неопределенности величин θ_0 и Bi принимает теперь следующий вид вместо (25):

$$u^* = \frac{u_{\max}}{2} \left[1 + \text{sign} \left(\theta_1^T(\tilde{y}) - \theta(R, t) + \rho_2(\tilde{y}) \left(\theta_2^T(\tilde{y}) - \theta(0, t) \right) \right) \right]. \quad (41)$$

Соответствующая структура замкнутой системы с обратными связями приведена на рис. 2.

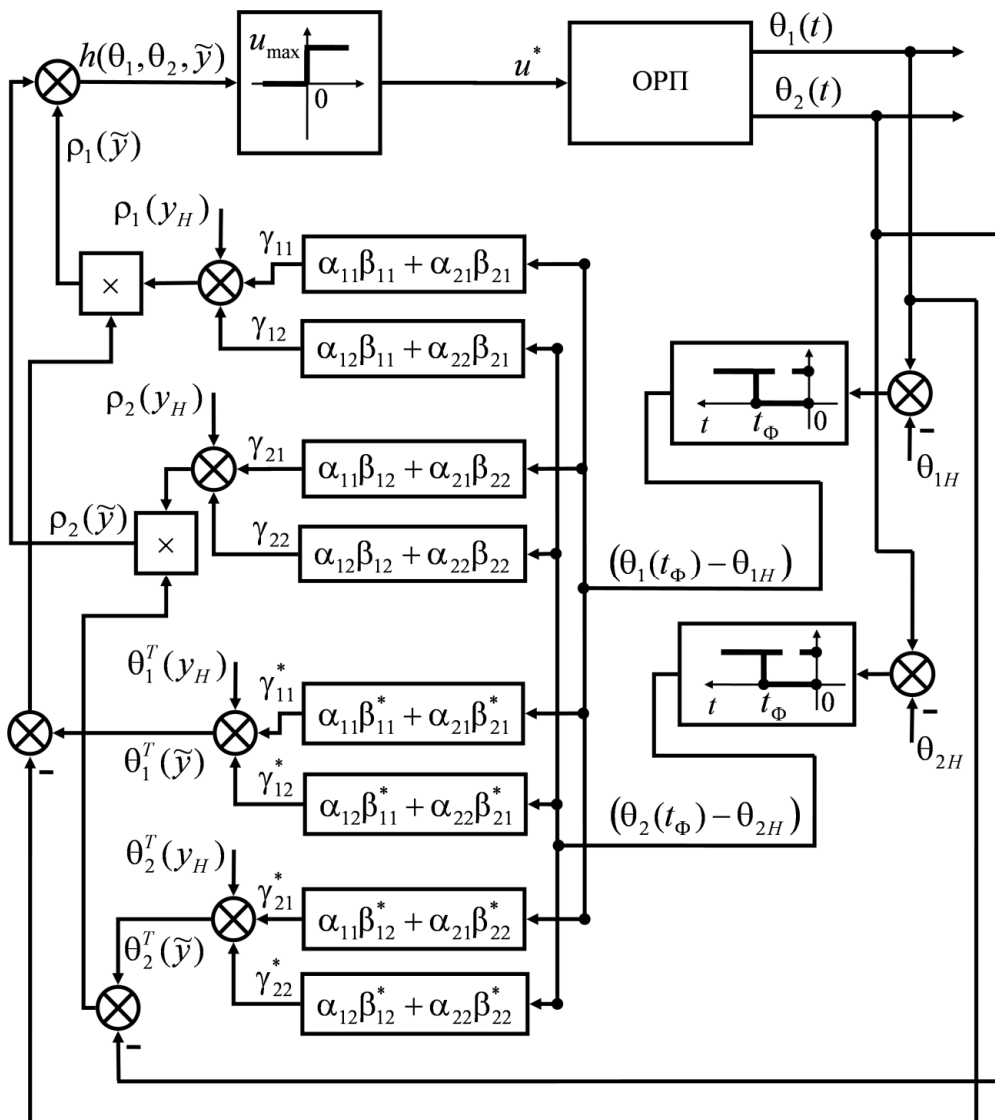


Рис. 2. Структура оптимальной по быстродействию системы управления процессом индукционного нагрева заготовки под обработку давлением с неполным измерением состояния в условиях интервальной неопределенности

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Rapoport E., Pleshivtseva Yu.* Optimal Control of Induction Heating Processes. – CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, 2007.
2. *Ранопорт Э.Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2009. – 677 с.
3. *Ранопорт Э.Я.* Оптимальное управление динамическими системами с распределенными параметрами в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта // Проблемы управления и моделирования в сложных системах. Тр. XIV Международной конференции. – Самара: СНЦ РАН, 2012. – С. 75-86.
4. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: Физматлит, 1962. – 608 с.

Статья поступила в редакцию 3 октября 2012 г.

SYNTHESIS OF TIME-OPTIMAL CONTROL SYSTEM OF THE INDUCTION HEATING PROCESSES WITH INTERVAL OF UNCERTAINTY CHARACTERISTICS OF THE OBJECT

I.S. Levin, E.Ya. Rapoport

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The problem of optimal time control systems synthesis with interval of incompletely characteristics of the object models with distributed parameters is considered. Synthesis of optimal controller of induction heating process was performed and structure identifier parameters of characteristic control object was proposed.

Keywords: *distributed parameter system, induction heating, control with interval uncertainty of characteristics of the object, the synthesis of optimal control.*

*Ilya S. Levin, Graduate student.
Edgar Ya. Rapoport (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.*