УДК 681.5.015.5:66.045

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ОХЛАЖДЕНИЯ ПОТОКА ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ[1]

И.А. Данилушкин, В.В. Снеговой

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
E-mail: idanilushkin@mail.ru

Рассматривается применение спектральной теории для построения математической модели процесса охлаждения потока движущейся среды в пространстве состояний. Процесс охлаждения потока описывается гиперболическим уравнением первого порядка. Приведены результаты сравнения переходного процесса реализованной модели с переходным процессом эталонной модели, полученной операторным методом.

Ключевые слова: *охлаждение потока, спектральная теория, пространство состояний, математическая модель, векторно-матричная форма Коши, вектор спектральной характеристики.*

Теплообменные аппараты различных конструкций широко применяются в различных отраслях промышленности. В качестве базовой математической модели тепловых процессов, протекающих внутри теплообменного аппарата перекрестного тока, может использоваться уравнение теплового баланса, согласно которому распределение температуры охлаждаемого потока $T(z,t)$ по длине трубки теплообменника в зависимости от координаты точки z и времени t описывается уравнением в частных производных [1]

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} + V\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} = \beta(t)\left[T_{CP}(t) - T(z,t)\right]; \quad 0 \le z \le L\,, \quad t \ge 0 \qquad (1)$$

с соответствующими граничными и начальными условиями

$$T(0,t) = g(t)\,,\; T(z,0) = T_0(z)\,. \qquad (2)$$

Здесь V – скорость потока; $\beta(t)$ – функция изменения коэффициента теплообмена; $T_{CP}(t)$ – температура среды, принятая одинаковой по всей длине теплообменника; L – общая длина трубки теплообменника; $T_0(z)$ – начальное распределение температуры; $g(t)$ – функция изменения температуры потока на входе теплообменника.

Управление температурой потока осуществляется за счет изменения скорости течения охлаждающего потока, что учтено в модели (1)–(2) коэффициентом $\beta(t)$. Для синтеза системы автоматического управления температурой потока на выходе теплообменного аппарата необходимо получить передаточную функцию по каналу «коэффициент теплообмена» – «температура на выходе», $\beta(t)$ – $T(L,t)$. Аналитического решения уравнения (1) не существует, однако поведение температурного распределения потока можно рассмотреть в отклонениях от установившегося режима [2, 3].

---

[1] *Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-08-00754-а.*

Иван Александрович Данилушкин (к.т.н.), докторант, каф. автоматики и управления в технических системах.

Василий Владимирович Снеговой, аспирант, каф. автоматики и управления в технических системах.

Представим уравнение (1) в следующем виде:

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} + V\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} + \beta(t)T(z,t) = \beta(t)T_{CP}(t)\,. \qquad (3)$$

Функции распределения температуры по длине теплообменного аппарата и изменения коэффициента теплообмена можно представить как суммы двух составляющих:

$$\beta(t) = \beta_C + \Delta\beta(t)\,, \quad T(z,t) = T_C(z) + \Delta T(z,t)\,, \qquad (4)$$

где $T_C(z)$ и β_C – постоянные составляющие температуры и коэффициента теплообмена соответственно, соответствующие установившемуся режиму $T_{CP}(t) = T_{CP} \equiv const$; $\Delta T(z,t)$ и $\Delta\beta(t)$ – функции, описывающие отклонения от величин постоянных составляющих для температуры и коэффициента теплообмена соответственно. Подставив (4) в (3) и приняв во внимание тот факт, что произведение $\Delta T(z,t)\cdot\Delta\beta(t)$ является бесконечно малой величиной высшего порядка, получим линеаризованное представление уравнения (3):

$$\frac{\partial \Delta T(z,t)}{\partial t} + V\frac{\partial T_C(z)}{\partial z} + V\frac{\partial \Delta T(z,t)}{\partial z} + \beta_C T_C(z) + \beta_C \Delta T(z,t) + \Delta\beta(t)T_C(z) = \qquad (5)$$

$$= \beta_C T_{CP}(t) + \Delta\beta(t)T_{CP}(t)\,.$$

В установившемся режиме при $\Delta T(z,t) = 0$ и $\Delta\beta(t) = 0$ будем иметь

$$V\frac{\partial T_C(z)}{\partial z} + \beta_C T_C(z) = \beta_C T_{CP}\,. \qquad (6)$$

После решения уравнения (6) получим следующее:

$$T_C(z) = T_{CP}\left[1 - \exp\left(-\frac{z}{V}\beta_C\right)\right]. \qquad (7)$$

Подставив (7) в (5) и упростив, получим

$$\frac{\partial \Delta T(z,t)}{\partial t} = -V\frac{\partial \Delta T(z,t)}{\partial z} - \beta_C \Delta T(z,t) + \Delta\beta(t)T_{CP}\exp\left(-\frac{z}{V}\beta_C\right) \qquad (8)$$

или, введя обозначение $U(z,t) = \Delta\beta(t)T_{CP}\exp\left(-\frac{z}{V}\beta_C\right)$, получим

$$\frac{\partial \Delta T(z,t)}{\partial t} = -V\frac{\partial \Delta T(z,t)}{\partial z} - \beta_C \Delta T(z,t) + U(z,t)\;. \qquad (9)$$

Уравнение (9) представляет собой математическую модель теплообменного аппарата в отклонениях от установившегося режима, определяемого параметрами $T_C(z)$, β_C, T_{CP}, $g(t) \equiv 0$.

Модель (9) можно преобразовать к бесконечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши, используя свойства спектральных характеристик [4]. Для этого каждую из функций, зависящую от пространственной координаты $\Delta T(z,t)$, $\dfrac{\partial \Delta T(z,t)}{\partial z}$ и $U(z,t)$, следует представить в виде обобщенного ряда Фурье по пространственной переменной на основе выбранной ортонормированной системы функций $P(k,z)$, $k \in \{1, 2, ...\}$:

$$\Delta T(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi^{\Delta T}(k,t)P(k,z)\,, \quad U(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi^{U}(k,t)P(k,z)\,, \quad \frac{\partial \Delta T(z,t)}{\partial z} = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi^{\Delta T}(k,t)P_1(k,z)\,,$$

где $\mathbf{P_1}$ – бесконечномерная квадратная операционная матрица дифференцирования первого порядка [4],

$$P_1(k,n) = \int_0^L P(k,z)\left(\frac{\partial P(n,z)}{\partial z}\right)dz\,, \quad k,n \in \{1, 2, \dots\}.$$

На основании свойств спектральных характеристик уравнение (9) в спектральной форме по пространственной переменной примет вид

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}^{\Delta T} = \left(-V\mathbf{P_1} - \beta_C \mathbf{E}\right)\boldsymbol{\varphi}^{\Delta T} + \mathbf{E}\boldsymbol{\varphi}^{U}\,, \tag{10}$$

где $\mathbf{E}$ – бесконечномерная единичная матрица.

Представление объекта (10) в векторно-матричной форме Коши имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \end{cases} \tag{11}$$

где $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}^{\Delta T}$ – вектор состояний, компонентами которого являются временные моды температуры потока внутри теплообменного аппарата; $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}^{U}$ – вектор коэффициентов разложения распределенного управления $U(z,t)$; $\mathbf{y}$ – вектор измеряемых переменных; $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – числовые матрицы, определяемые выражениями

$$\mathbf{A} = \left[-V\mathbf{P_1} - \beta_C \mathbf{E}\right], \quad \mathbf{B} = \mathbf{E}\,. \tag{12}$$

$\mathbf{D}$ – матрица, состоящая из нулей; $\mathbf{C}$ – матрица, составленная в соответствии с [4] из элементов ортонормированной системы разложения, вычисленных для фиксированных значений пространственных координат на интервале $z \in [0, L]$.

В качестве системы разложения выберем систему функций

$$P(k,z) = \sqrt{2}\sin\left((2k-1)\pi z/2L\right); \; k \in \{1, 2, \dots\}. \tag{13}$$

Для выполнения вычислительных процедур ограничимся первыми пятью членами разложения в системе (13) и соответственно числом уравнений в системе (11). Для параметров модели $V = 1/61$ м/с, $\beta_C = 0.03$ 1/с, $T_{CP} = 30°C$, $L = 1$ м матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ будут иметь следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.0464 & 0.0492 & -0.0273 & 0.0383 & -0.0295 \\ -0.0164 & -0.0464 & 0.0820 & -0.0230 & 0.0492 \\ -0.0055 & -0.0492 & -0.0464 & 0.1148 & -0.0211 \\ -0.0055 & -0.0098 & -0.0820 & -0.0464 & 0.1475 \\ -0.0033 & -0.0164 & -0.0117 & -0.1148 & -0.0464 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{14}$$

$$\mathbf{C} = [1.4142 \quad -1.4142 \quad 1.4142 \quad -1.4142 \quad 1.4142]; \qquad \mathbf{D} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

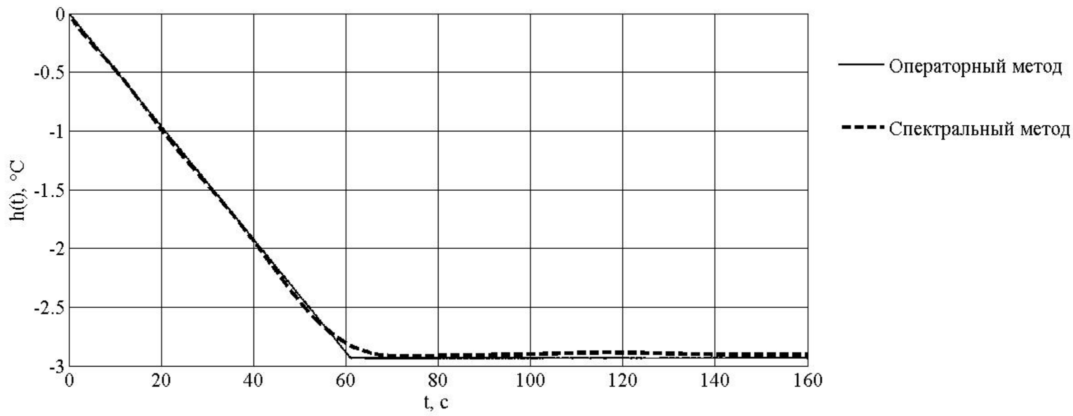
Вектор управляющих воздействий принимает вид

$$\boldsymbol{\varphi}^{U} = \Delta\beta(t) \cdot [9.3167 \quad 8.3107 \quad 4.9322 \quad 3.8547 \quad 2.8903].$$

Для оценки качества модели, полученной на основе спектрального метода, сравним ее переходный процесс (см. рисунок) с переходным процессом эталонной модели, полученной на основе операторного метода,

$$T(L,p) = \frac{T_{CP}}{p}\exp\left(-\frac{L}{V}\beta_C\right) \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{L}{V}p\right)\right) \cdot \Delta\beta(p)\,.$$

В момент времени t=0 происходит скачкообразное изменение управляющего сигнала $\Delta\beta(t)$ на входе исследуемой и эталонной моделей с нуля на –0.01.



Переходные процессы моделей на основе операторного и спектрального методов

Анализ переходных процессов показал достаточную для задач синтеза систем управления точность исследуемой модели. Представление модели процесса охлаждения потока в пространстве состояний (10) в дальнейшем будет использоваться для синтеза систем автоматического управления режимами работ теплообменных аппаратов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Данилушкин И.А., Россеев Н.Н.* Синтез системы автоматического управления температурным полем трубчатого теплообменника. – Самара: СамГТУ.
2. *Данилушкин А.И., Рапопорт Э.Я.* Алгоритмы функционирования процесса непрерывно-последовательного индукционного нагрева // Алгоритмизация и автоматизация технологических процессов и промышленных установок: Межвуз. сб. научн. тр. Вып. VII. – Куйбышев: КПтИ, 1976. – С. 118-124.
3. *Россеев Н.Н., Данилушкин И.А., Кузнецов П.К.* Модель распределения температуры масла в аппарате воздушного охлаждения // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды III Всеросс. научн. конференции. Ч. 2. Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределенными параметрами. – Самара: СамГТУ, 2006. – С. 142-144.
4. *Коваль В.А.* Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем. – Саратов: Изд-во Сарат. гос. техн. унт-та, 1997.

Статья поступила в редакцию 4 марта 2012 г.

CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL MODEL FOR COOLING PROCESS OF MOVING MEDIUM FLOW IN STATE SPACE

I.A. Danilushkin, V.V. Snegovoy

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

An application of the spectral theory for construction of mathematical model for cooling process of moving medium flow in state space is considered. The process of flow cooling is described by a first-order hyperbolic equation. Comparison results of the realized model transient and the reference model transient received by an operator method are given.

Keywords: *cooling of flow, spectral theory, state space, mathematical model, vector-matrix Cauchy form, vector of a spectral characteristic.*

Ivan A. Danilushkin (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.
Vasiliy V. Snegovoy, Postgraduate student.