

КРИТЕРИАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ОЦЕНОК КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ КРИТЕРИЯХ РИСКА

В.Г. Саркисов

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: vigen.sarkisov@mail.ru

Рассматривается вопрос построения и анализа критериальных множеств оценок качества управления портфелем. Исследованы различные критерии, применяемые при описании риска. Проведен анализ моделей портфеля с ограничениями Марковица и Блэка, а также ограничениями, установленными российским законодательством для квалифицированных и неквалифицированных инвесторов.

Ключевые слова: оценка риска, критериальное множество, множество Парето, инвестиционный портфель.

Введение. Оптимизация инвестиционного портфеля (а в более общем случае – оптимизация системы управления портфелем) в большинстве случаев включает следующие этапы:

- 1) выбор критериев оптимальности. Обычно в качестве критериев выбираются те или иные оценки потенциальной прибыли (доходность) и убытков (риск);
- 2) построение критериального множества, содержащего значения критериев для всех реализуемых портфелей;
- 3) определение эффективной границы критериального множества, состоящей из недоминируемых портфелей;
- 4) выбор портфеля на эффективной границе.

Наиболее проработанным является подход Марковица [1], подразумевающий использование в качестве оценки доходности ее математического ожидания, а в качестве оценки риска – дисперсии доходности.

В настоящей статье производится анализ ограничений российского финансового рынка и рассматривается вопрос построения критериальных множеств и нахождения эффективных границ для различных оценок риска.

Ограничения на доли инвестиционных инструментов в портфеле. Рассмотрим преобразование относительных приращений $\Delta C_n(t)$ цен инвестиционных инструментов в относительное приращение $\Delta S(t)$ стоимости портфеля $S(t)$:

$$\Delta S(t) = \sum_{n=1}^N (\alpha_n(t-1) \cdot \Delta C_n(t)), \quad (1)$$

где N – количество рассматриваемых инвестиционных инструментов, $\Delta S(t) = (S(t) - S(t-1)) / S(t-1)$ – относительное приращение стоимости портфеля за t -ый период; $\alpha_n(t-1)$ – доля n -го инструмента в портфеле на конец $(t-1)$ -го периода времени. Денежные средства рассматриваются как инвестиционный инструмент с нулевыми приращениями цены.

На доли α_n могут быть наложены ограничения в соответствии с одним из вариантов, например:

- 1) портфель квалифицированного инвестора [2];
- 2) портфель неквалифицированного инвестора;
- 3) портфель с неограниченным кредитованием (портфель Блэка);
- 4) портфель без использования кредитования (портфель Марковица).

Рассмотрим наиболее общий случай и далее формализуем перечисленные выше варианты. Для каждого инвестиционного инструмента введем коэффициенты β_n^L и β_n^S , показывающие максимальный размер кредитования для данного инструмента при открытии длинных и коротких позиций соответственно. Например, при $\beta_n^L = \beta_n^S = 3$ инвестор может взять кредит в размере не более 300 % собственных средств, что позволяет ему открыть длинную позицию на 400 % (100 % собственных + 300 % заемных), а короткую – на 300 % (заемных) от собственных средств. Ограничение на доли инструментов в портфеле в общем случае имеет вид

$$\sum_{n=1}^N \left[\begin{cases} \alpha_n / (\beta_n^L + 1), & \text{при } \alpha_n > 0 \\ -\alpha_n / \beta_n^S, & \text{при } \alpha_n < 0 \end{cases} \right] = 1. \quad (2)$$

Модель портфеля Блэка допускает сколь угодно большой размер кредитования как денежными средствами, так и инвестиционными инструментами ($\beta_n^L = \beta_n^S = \infty$) и имеет единственное ограничение:

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n = 1. \quad (3)$$

Ограничение (3) не может быть получено из (2), так как не отражает реальных условий кредитования. Практическое применение ограничения (3) означало бы, что разница в объемах открытых длинных и коротких позиций была бы равна объему собственных средств инвестора, а кредит на открытие длинных позиций «компенсировался» бы аналогичным кредитом на открытие коротких позиций. Таким образом, портфель Блэка, являясь удобной математической моделью, имеет лишь косвенное отношение к реальному управлению инвестиционным портфелем.

Портфель Марковица не предполагает использования заемных средств ($\beta_n^L = \beta_n^S = 0$). При этом общее условие (2) вырождается в (4), являющееся ограничением портфеля в модели Блэка, дополненным требованием неотрицательности долей портфеля:

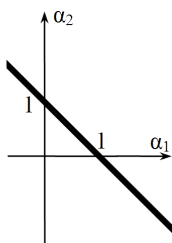
$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N \alpha_n = 1 \\ \alpha_n \geq 0, \forall n \end{cases}. \quad (4)$$

В отличие от ограничений портфеля Блэка ограничения на портфель Марковица реализуемы.

Российское законодательство разделяет всех инвесторов на категории квалифицированных и неквалифицированных в зависимости от опыта работы, объема инвестиционного портфеля, объема и частоты сделок. При работе с высоколиквидными инструментами квалифицированному инвестору может предоставляться кредитное плечо в размере до 300 % от собственных средств ($\beta_n^L = \beta_n^S = 3$), а неквалифицированному – в размере до 100 % ($\beta_n^L = \beta_n^S = 1$). При работе с низколиквидными инструментами кредитное плечо не предоставляется ($\beta_n^L = \beta_n^S = 0$).

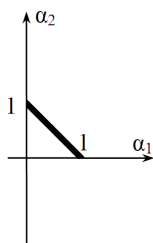
На рис. 1 дано геометрическое представление различных ограничений на доли в портфеле из двух и трех инвестиционных инструментов.

Портфели Блэка



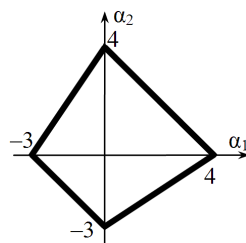
а

Портфели Марковица



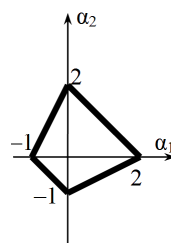
б

Портфели квалифицированного инвестора

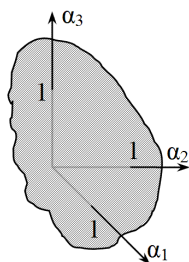


в

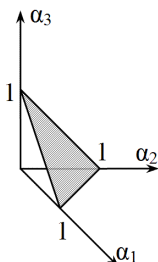
Портфели неквалифицированного инвестора



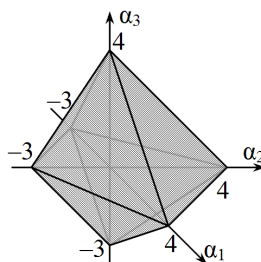
г



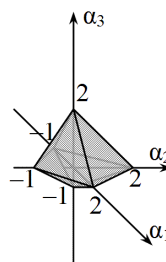
д



е



ж



з

Рис. 1. Множества допустимых портфелей из двух и трех инвестиционных инструментов при ограничениях различных видов

Очевидно, что множество реальных портфелей квалифицированного (как и неквалифицированного) инвестора вовсе не является подмножеством множества портфелей Блэка и многочисленные научные результаты, полученные для портфеля Блэка, при реальном инвестировании следует применять с особой осторожностью. Модель портфеля Марковица корректно описывает случай реального портфеля без кредитования.

Далее рассматриваются оценки качества портфеля квалифицированного инвестора и как частный случай портфеля Марковица.

Анализ критериальных множеств при использовании дисперсии доходности в качестве критерия риска. Дисперсия D_{Π} доходности портфеля может быть однозначно рассчитана на основе дисперсий D_i доходностей входящих в него инструментов и коэффициентов r_{ij} парной корреляции этих доходностей с помощью формулы дисперсии линейной комбинации случайных величин:

$$D_{\Pi} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j r_{ij} \sqrt{D_i D_j}. \quad (5)$$

Математическое ожидание m_{Π} доходности для этого же портфеля

$$m_{\Pi} = \sum_{i=1}^N \alpha_i m_i, \quad (6)$$

где m_i – математическое ожидание доходности i -го инструмента.

Для портфеля из двух инструментов

$$D_{\Pi} = \alpha_1^2 D_1 + \alpha_2^2 D_2 + 2\alpha_1 \alpha_2 r_{12} \sqrt{D_1 D_2}, \quad (7)$$

$$m_{\Pi} = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2. \quad (8)$$

На рис. 2 приведен пример критериальных множеств $\{m_{\Pi}, D_{\Pi}\}$ для портфелей из двух рисковых инструментов ($m_2 > m_1 > 0$, $D_2 > D_1$, $r_{12} < 0$) и денежных средств с ограничениями Марковица (внутренняя область треугольника на рис. 1, б), квалифицированного и неквалифицированного инвесторов (внутренние области трапеций на рис. 1, в и 1, г).

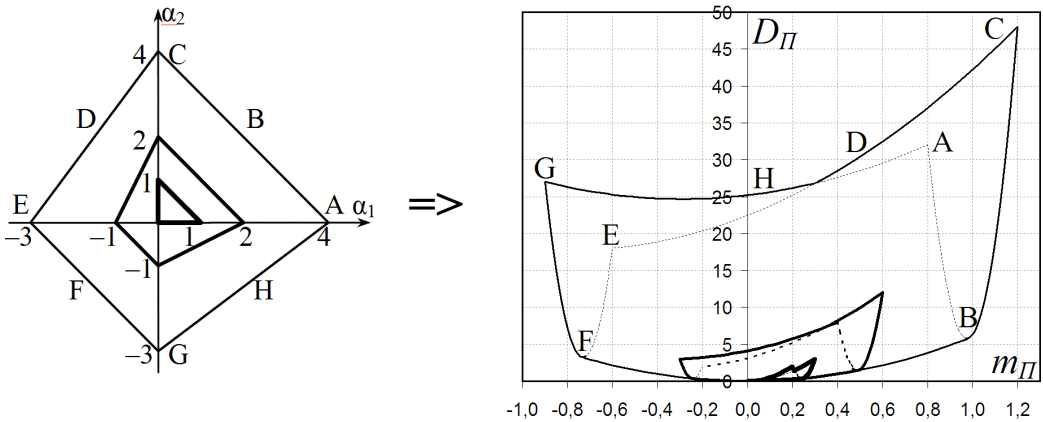


Рис. 2. Ограничения на доли в портфеле и критериальные множества Марковица, квалифицированного и неквалифицированного инвесторов при использовании дисперсии доходности в качестве критерия риска

Границу каждого критериального множества образуют отрезки парабол, являющихся отображениями соответствующих отрезков прямых на рис. 1, б, 1, в и 1, г (для случая квалифицированного инвестора отрезки обозначены буквами А...Н), и парабола FB, соответствующая линии, проходящей через внутренние области треугольника и трапеций на рис. 1, б, 1, в и 1, г. Множество Парето образовано отрезками парабол FB (при $m_{\Pi} > 0$) и BC.

Критериальное множество для неквалифицированного инвестора близко по свойствам к множеству квалифицированного инвестора. Отличие вида критериального множества для портфелей Марковица от остальных обусловлено требованием неотрицательности долей в портфеле.

В некоторых случаях квалифицированный инвестор может получить значительно более высокую доходность при сопоставимом уровне риска (например, на рис. 2 при уровне риска $D_{\Pi} = 5$ квалифицированный инвестор может сформировать портфель с математическим ожиданием доходности $m_{\Pi} = 0,90$, неквалифицированный – с $m_{\Pi} = 0,55$, а ограничения Марковица вообще не позволяют сформировать портфель с доходностью m_{Π} выше 0,3).

Рассмотрим более подробно случаи, когда возникает подобное преимущество.

На рис. 3 представлены три варианта (в порядке убывания коэффициента корреляции r_{12} для случая $m_2 > m_1 > 0$, $D_2 > D_1$), соответствующие различным возможным эффективным границам (для ограничений некавалифицированного инвестора и Марковица).

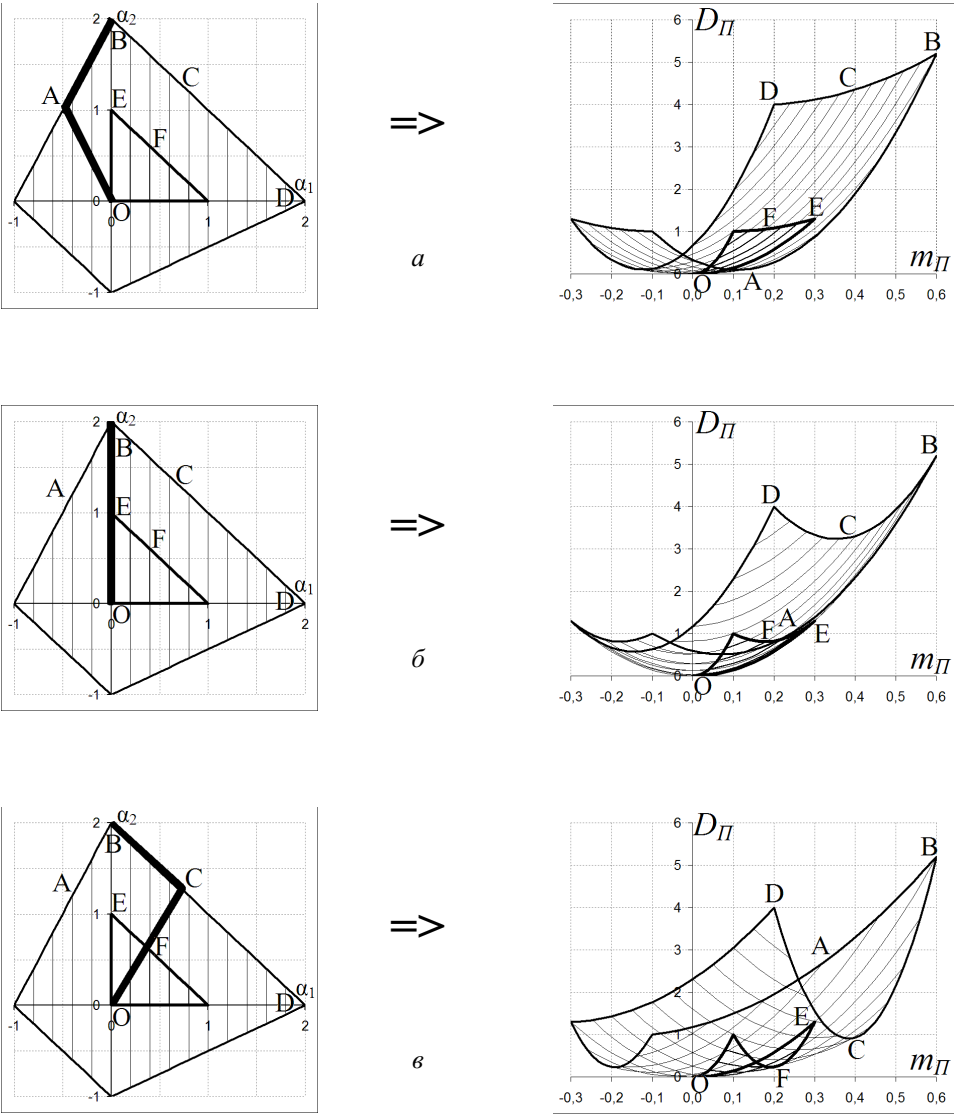


Рис. 3. Варианты критериальных множеств для портфелей Марковица и некавалифицированного инвестора

Точка О соответствует портфелю, на 100 % состоящему из денежных средств ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$). Для случая сильной положительной корреляции доходностей инструментов, представленного на рис. 3, а, эффективная граница для портфеля некавалифицированного инвестора ОАВ не содержит отрезок ОЕ, являющийся эффективной границей для портфеля Марковица. В этом случае некавалифицированный инвестор может обеспечить себе более низкий риск при любой достижимой для портфеля Марковица доходности. При получении

доходности большей, чем в точке А, квалифицированный инвестор имеет преимущество над неквалифицированным (аналогично рис. 2).

При ослаблении корреляционной зависимости достигается критический случай, представленный на рис. 3, б, характерной особенностью которого является принадлежность отрезка ОЕ эффективной границе обоих критериальных множеств. В этом случае неквалифицированный инвестор может сформировать оптимальный портфель, отвечающий одновременно и ограничениям Марковица (отрезок ОЕ). Для получения большей доходности, чем у портфеля Марковица, неквалифицированный (и квалифицированный) инвестор вынужден (в отличие от предыдущего случая) принимать больший риск.

При дальнейшем уменьшении r_{12} критериальные множества принимают вид, представленный на рис. 3, в. На отрезке ОЕ оптимальные портфели Марковица и неквалифицированного (и квалифицированного) инвестора совпадают. При дальнейшем увеличении доходности неквалифицированный инвестор может сформировать портфель с более низким риском, чем у портфеля Марковица. Аналогичное преимущество имеет квалифицированный инвестор над неквалифицированным при формировании портфеля с доходностью большей, чем в точке С.

При рассмотрении большего числа инвестиционных инструментов критериальное множество является отображением соответствующих многогранников (например неправильных пирамид и октаэдров), причем отображениями ребер этих многогранников также являются участки парабол на плоскости $\{m, D\}$.

Далее будет показано, что некоторые другие критерии риска обладают теми же свойствами, что и дисперсия доходности портфеля.

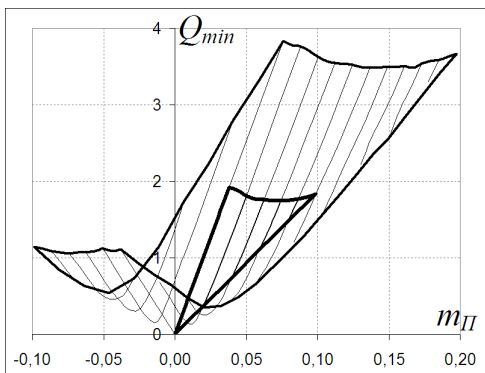
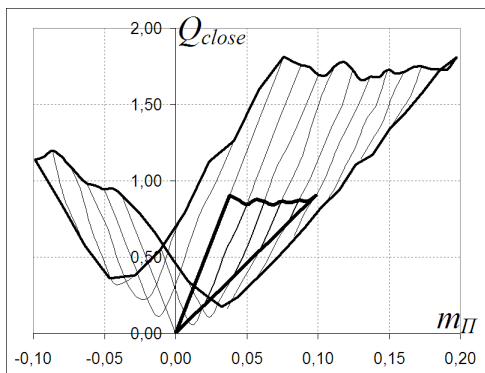
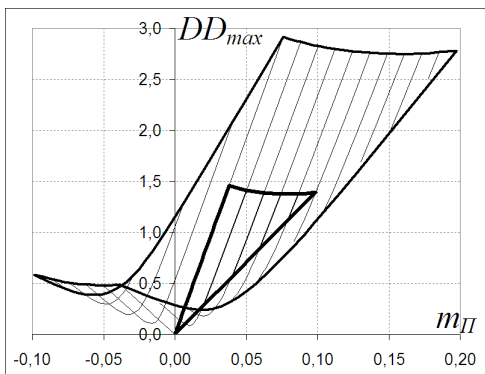
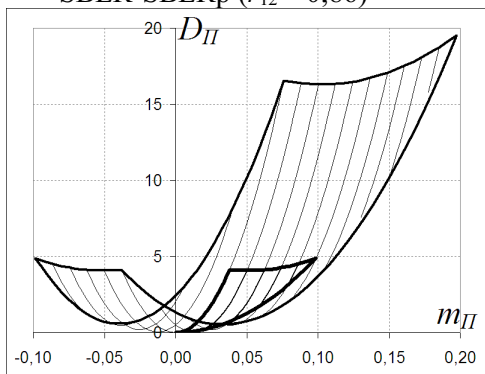
Особенности применения максимальных потерь капитала и квантиля доходности в качестве критериев риска. Существенным недостатком дисперсии в качестве критерия риска является сложность ее интуитивного восприятия неподготовленным инвестором. Намного более понятными показателями [3] являются процент максимальных потерь капитала (maximum drawdown, DD_{max}) [4] и квантили доходности [5] порядка 0,3, рассчитываемые по минимальным ценам за период (Q_{min}) и по ценам на конец периода (Q_{close}) (для унификации взяты с противоположным знаком). На рис. 4 представлены критериальные множества, полученные при использовании четырех рассматриваемых критериев риска.

Приведенные критериальные множества получены в результате статистической обработки данных о торгах акциями на Московской межбанковской валютной бирже (ММВБ). Среди наиболее ликвидных акций были выбраны пары с различными коэффициентами корреляции: наиболее сильно коррелированные обыкновенные и привилегированные акции Сбербанка (SBER и SBERp), акции Газпрома и ЛУКОЙЛа (GAZP и LKOH) со средним уровнем корреляции и наиболее слабо коррелированные акции Транснефти и Уралкалия (TRNFr и URKA).

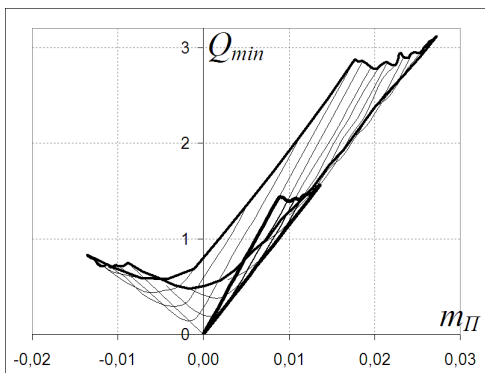
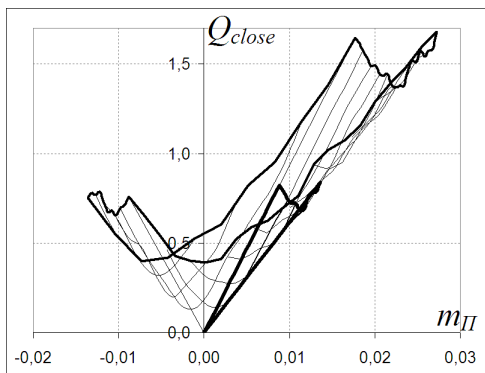
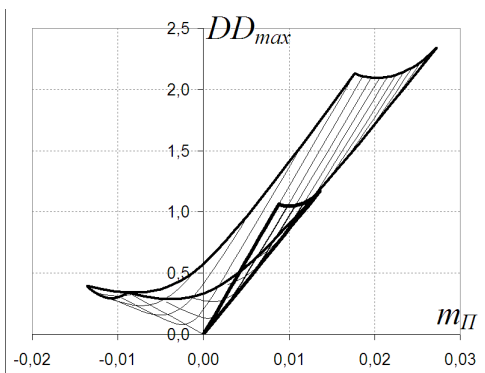
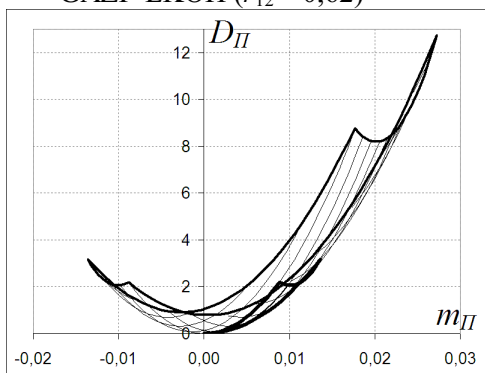
Очевидно, что рассмотренные ранее особенности взаимного расположения критериальных множеств портфелей неквалифицированного инвестора и Марковица сохраняются для всех исследованных критериев риска.

Границами критериальных множеств при критерии риска DD_{max} являются отрезки гипербол и прямых (вырожденных гипербол). В силу ограниченности статистического материала полученные экспериментально границы критериальных множеств при критериях риска Q_{close} и Q_{min} отличаются от гипербол и прямых.

SBER-SBERp ($r_{12} = 0,86$)



GAZP-LKOH ($r_{12} = 0,62$)



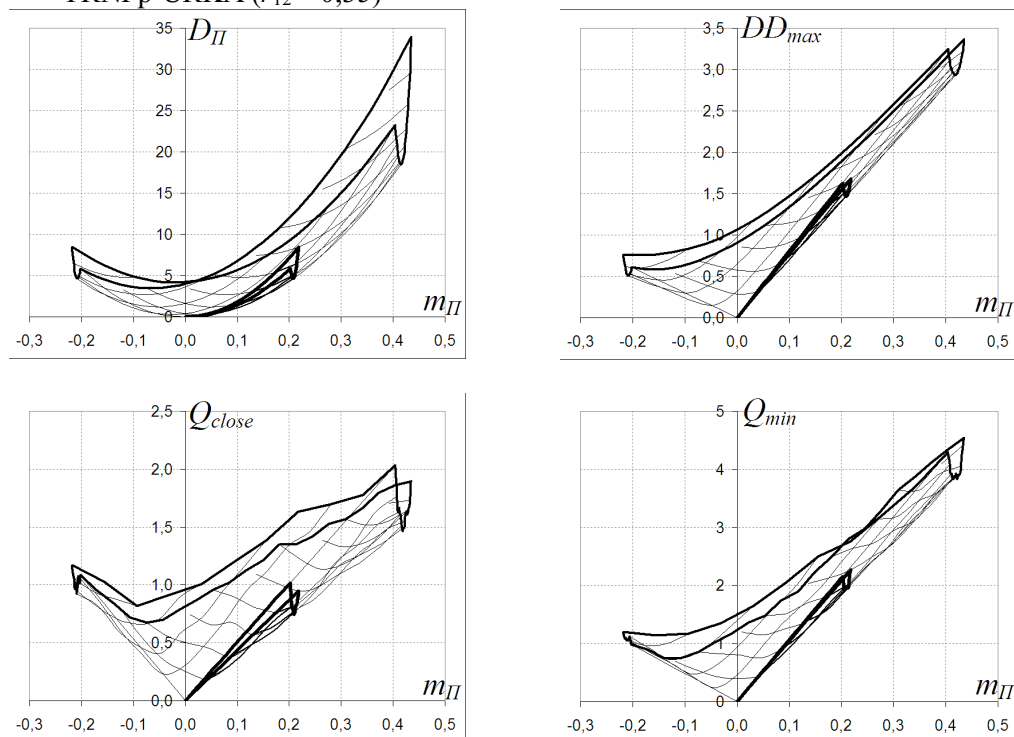


Рис. 4. Критериальные множества при использовании различных критериев риска

Закключение. Проведенный анализ позволил сделать следующие выводы:

- 1) портфель Блэка нереализуем в условиях российского фондового рынка. Предложены математические описания множеств реализуемых портфелей;
- 2) критериальные множества при использовании рассмотренных критериев риска имеют схожие свойства, одинаково изменяясь при изменении корреляции между изменениями цен акций;
- 3) точки перехода между кривыми, образующими эффективную границу критериального множества, соответствуют одним и тем же уровням доходности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Markowitz H. Portfolio Selection // The Journal Of Finance. – 1952. – № 1. – С. 77-91.
2. Положение о порядке признания лиц квалифицированными инвесторами (приказ ФСФР России от 18.03.2008 № 08-12/пз-н).
3. Саркисов В.Г. Модели риска инвестиционного портфеля, ориентированные на приоритеты инвестора // Труды X Международной научно-практической конференции «Финансово-актуарная математика и эвентология безопасности», Красноярск, 2011. – С. 328-331.
4. ЛеБо Ч., Лукас Д.В. Компьютерный анализ фьючерсных рынков. – М.: Альпина Паблишер, 2011. – 304 с.
5. Панков А.Р., Платонов Е.Н., Семенухин К.В. Минимаксная оптимизация инвестиционного портфеля по квантильному критерию // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 7. – С. 117-133.

Статья поступила в редакцию 5 июля 2012 г.

CRITERION SETS OF ASSESSMENTS OF AN INVESTMENT PORTFOLIO MANAGEMENT QUALITY WITH VARIOUS CRITERIA OF RISK

V.G. Sarkisov

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The issue of modeling and analysis of criterion sets of portfolio management quality assessments is considered. The various risk criteria are investigated. The analysis is carried out for portfolio models with Markowitz's and Black's constraints, and also the Russian legislation constraints for qualified and non-qualified investors.

Keywords: risk assessment, criterion set, Pareto set, investment portfolio.