УДК 517.958, 66.021.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДИФФУЗИИ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ ПОТОКА ЖИДКОСТИ В ХИМИЧЕСКОМ РЕАКТОРЕ[1]

А.Г. Мандра, Е.В. Аникин

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
amandra@mail.ru

Рассматривается задача математического моделирования процесса диффузии с управляющим воздействием по скорости движения вещества в химическом реакторе.

Ключевые слова: *диффузия, распределенный объект, переменная скорость потока жидкости.*

Исследование процесса распространения вещества в технологических установках базируется, в первую очередь, на учете пространственной распределенности концентрации вещества по объему реактора. В зависимости от конструктивных особенностей технологических установок для исследования поведения вещества применяют различные математические модели: идеального вытеснения, смешения, ячеечную, диффузионную и др. [1].

Рассмотрим процесс распространения вещества в реакторе, который описывается однопараметрической диффузионной моделью

$$\frac{\partial C(l,t)}{\partial t}+V(t)\frac{\partial C(l,t)}{\partial l}=D\frac{\partial^2 C(l,t)}{\partial l^2};\ 0<l<L;\ t>0 \tag{1}$$

с граничными и начальными условиями

$$-D\frac{\partial C(0,t)}{\partial l}=V(t)\left(C_{вх}(t)-C(0,t)\right);\frac{\partial C(L,t)}{\partial l}=0; \tag{2}$$

$$C(l,0)=C_0, \tag{3}$$

где $C(l,t)$ – распределение концентрации вещества по длине реактора; $V(t)$ – скорость потока в реактор; D – коэффициент диффузии; $C_{вх}(t)$ – концентрация вещества на входе в реактор; L – длина реактора.

В общем случае скорость подачи вещества в реактор $V(t)$ и концентрация вещества на входе в реактор $C_{вх}(t)$ являются функциями времени, если предположить, что концентрация вещества на входе в реактор является величиной постоянной $C_{вх}(t)=C_{вх}$, а $V(t)$ принимает некоторые значения в различные моменты времени

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №09-08-00297-а, №10-08-00754-а; ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы» (2010-1.3.1-230-009/8); АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект №2.1.2/4236).

Андрей Геннадьевич Мандра, к.т.н, старший преподаватель.
Евгений Владимирович Аникин, студент.

$$V(t)=\begin{cases} V_1, & 0<t\le t_1; \\ V_2, & t_1<t\le t_2; \\ \dots \\ V_N, & t>t_{N-1}, \end{cases} \tag{4}$$

которые соответствуют некоторым положениям исполнительного механизма, при этом время перехода от одного положения к другому считается пренебрежимо малым.

Решение краевой задачи (1)-(3) может быть представлено в интегральной форме [2]

$$C(l,t)=\int_0^t\int_0^L G(l,\xi,t-\tau)\cdot\omega(\xi,\tau)d\xi d\tau\,, \tag{5}$$

где $G(l,\xi,t-\tau)$ – функция Грина; $\omega(\xi,\tau)$ – стандартизирующая функция.

Разобьем краевую задачу (1)-(3) на подзадачи, у которых скорость потока в реакторе будет постоянной,

$$\frac{\partial C(l,t)}{\partial t}+V_i\frac{\partial C(l,t)}{\partial l}=D\frac{\partial^2 C(l,t)}{\partial l^2},\ 0<l<L\,;\ t_{i-1}<t\le t_i \tag{6}$$

с граничными и начальными условиями

$$-D\frac{\partial C_i(0,t)}{\partial l}=V_i\left(C_{вх}(t)-C_i(0,t)\right);\frac{\partial C_i(L,t)}{\partial l}=0\,; \tag{7}$$

$$C_i(l,0)=\begin{cases} C_0, & i=1; \\ 0, & i=\overline{2,N}, \end{cases} \tag{8}$$

где $t_0=0$.

При этом решение краевой задачи (1)-(3) согласно (5) представляется как сумма решений краевых задач (6)-(8):

$$C(l,t)=\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^L G_i(l,\xi,t-\tau)\cdot\omega_i(\xi,\tau)1(t_i-\tau)1(\tau-t_{i-1})d\xi d\tau=\sum_{i=1}^{N}C_i(l,t). \tag{9}$$

В (8) $G_i(l,\xi,t-\tau)$ − функция Грина для $C_i(l,t)$ [3], которая имеет вид

$$G_i(l,\xi,t)=\exp\left(\frac{V_i(l-\xi)}{2D}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{in}(l)\varphi_{in}(\xi)G_{in}(\mu_{in},t), \tag{10}$$

где $G_{in}(\mu_{in},t)=\exp\left(-D\mu_{in}{}^2t-\frac{V_i^2}{4D^2}t\right)$;

$\varphi_i(\mu_n,l)=A_{in}\left[\frac{V_iL}{D\eta_{in}}\sin\left(\eta_{in}\frac{l}{L}\right)+\cos\left(\eta_{in}\frac{l}{L}\right)\right]$ − собственные функции;

$A_{in}=\frac{V_i}{2D\mu_{in}{}^2}+\frac{L}{2}+\frac{LV_i^2}{8D^2\mu_{in}{}^2}$;

$\mu_{in} = \sqrt{\eta_{in}^2 + \frac{V_i^2}{4D^2}}$ − собственные числа, где η_{in}, $n = 1,2,...$ − бесконечно возрастающая последовательность корней уравнения

$$\frac{tg(\eta l)}{\eta} = \frac{4DV_i}{4D^2\eta^2 - V_i^2}; \tag{11}$$

$\omega_i(\xi, t)$ − стандартизирующая функция для $C_i(l, t)$ [3], которая имеет вид

$$\omega_i(\xi, \tau) = V_i \cdot C_{вх}\delta(\xi) \tag{12}$$

С учетом (9)-(12) решение краевой задачи (1)-(3) при изменении скорости потока в виде (4) имеет вид

$$C(l,t) = \frac{C_{вх}}{D}\sum_{i=1}^{N} V_i \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_i(\mu_{in}, l)\varphi_i(\mu_{in}, 0)\frac{4D^2 G_{in}(\mu_{in}, t)}{4D^3\mu_{in}^2 + V_i^2}\left[G_{in}(\mu_{in}, t_i) - G_{in}(\mu_{in}, t_{i-1})\right]. \tag{13}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кафаров В.В., Глебов М.Б.* Математическое моделирование основных процессов химических производств: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1991. – 400 с.: ил.
2. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высш. шк., 2003. – 299 с.
3. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

Статья поступила в редакцию 11 марта 2012 г.

MATHEMATICAL MODELLING OF PROCESS OF DIFFUSION AS DISTRIBUTED OBJECT OF CONTROL WITH VARIABLE STRUCTURE

A.G. Mandra, E. V. Anikin

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The problem of mathematical modeling of process of diffusion, with control action on speed of movement of substance in the chemical reactor is described.

Keywords: *diffusion, distributed object, object with variable structure.*

Andrey G. Mandra, PhD, senior lecturer.
Evgeniy. V. Anikin, student.