Информационные технологии

УДК 621.391

СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИТЕРИЯ МОМЕНТОВ

В.И. Батищев, И.И. Волков, А.Г. Золин

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
Е-майл: vib@list.ru

Рассмотрен метод построения обратных цифровых фильтров для решения обратных задач восстановления сигналов на основе аппроксимационного подхода. В качестве критерия адекватности используется критерий моментов.

***Ключевые слова**: критерий моментов, КИХ-фильтр, весовая функция, обратный фильтр.*

В практике обработки и интерпретации экспериментальных данных часто возникает необходимость рассмотрения обратной задачи, заключающейся в восстановлении неизвестного входного воздействия по результатам регистрации откликов на выходе средств измерения. В большинстве случаев это задача компенсации искажающего действия аппаратной функции, обеспечивающая улучшение разрешающей способности различного рода измерительных приборов и систем.

На сегодняшний день методология синтеза оптимальных алгоритмов восстановления сигналов разработана достаточно полно. Однако существующие методы либо требуют для своей реализации не всегда доступной априорной информации, либо сталкиваются с вычислительными проблемами, связанными с некорректностью обратных задач и необходимостью использования регуляризующих процедур [1, 2].

В статье предлагаются алгоритмы синтеза цифровых фильтров для решения задач восстановления сигналов, основанные на использовании метода моментов, свойства и достоинства которого известны [3, 4].

Наблюдается временной ряд $y(m)$, который можно представить в виде преобразованного КИХ-фильтром с весовой функцией $h_0(i)$ временного ряда $x(m)$. Ставится задача синтеза обратного КИХ-фильтра с такой функцией $h(i)$, чтобы при подаче на его вход временного ряда $y(m)$ его выходной сигнал был оценкой сигнала $x(m)$.

Виталий Иванович Батищев (д.т.н., проф.), заведующий кафедрой «Информационные технологии».

Игорь Иванович Волков (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Информационные технологии».

Алексей Георгиевич Золин (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Информационные технологии».

В этом случае

$$y(m) = \sum_{i=0}^{N_0-1} h_0(i)x(m-i), \qquad (1)$$

$$\hat{x}(m) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)y(m-i). \qquad (2)$$

Подставив в (2) $y(m)$ из (1), получим

$$\hat{x}(m) = \sum_{i=0}^{N_0+N-2} H(i)x(m-i). \qquad (3)$$

Здесь $H(i)$ – весовая функция КИХ-фильтра, преобразующего исходный временной ряд $x(m)$ в его оценку.

Из соотношения (3) следует, что для идеального решения задачи ($\hat{x}(m) = x(m)$) функция $H(i)$ должна представлять собой символ Кронекера

$$H(i) = \delta(i). \qquad (4)$$

Так как вид функции $H(i)$ целиком и полностью определяется видом весовой функции обратного фильтра $h(i)$, то эта функция должна выбираться такой, чтобы $H(i)$ была как можно ближе к символу Кронекера.

Это приближение предлагается осуществлять по критерию моментов.

Пусть выбрана любая система линейно независимых функций $\Psi_k(i), k = \overleftarrow{0, p}$, таких, чтобы функция $\Psi_k(i+j)$ была функцией с разделяющимися переменными i и j. Такими функциями, в частности, являются полиномы, экспоненты, синусы, косинусы и т. п.

Будем называть К-м моментом символа Кронекера величины

$$\gamma_k = \sum_{i=0}^{N_0+N-2} \delta(i)\Psi_k(i) = \Psi_k(0), \qquad (5)$$

а К-м моментом весовой функции H_i

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{N_0+N-2} H(i)\Psi_k(i). \qquad (6)$$

Функцию h_i будем выбирать такой, чтобы выполнялось условие

$$\gamma_k = \mu_k,\ k = \overleftarrow{0, p}. \qquad (7)$$

В этом случае

$$\lim_{p\to\infty} H(i) = \delta(i). \qquad (8)$$

Условие (8) с учетом (6) и (5) сводится к такому:

$$\sum_{i=0}^{N_0+N-2} H(i)\Psi_k(i) = \Psi_k(0), k = 0, p, \qquad (9)$$

получаем

$$\sum_{i=0}^{N_0+N-2} \Psi_k(i)H(i) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N_0-1} h_0(v)h(i)\Psi_k(i+v).$$

Подстановка полученного результата в (9) дает систему уравнений, из которых должна определиться весовая функция обратного фильтра:

$$\sum_{v=0}^{N_0-1}\sum_{i=0}^{N-1} h_0(v)h(i)\Psi_k(i+v) = \Psi_k(0),\ k=\overleftarrow{0,p}. \qquad (10)$$

Теперь решим систему уравнений (10) для различных видов базисных функций.

Полиномиальные базисные функции.

$$\Psi_k(i) = i^k. \qquad (11)$$

В этом случае соотношение (10) принимает вид

$$\sum_{v=0}^{N_0-1}\sum_{i=0}^{N-1} h_0(v)h(i)(i+v)^k = \delta_k,$$

или, после преобразований,

$$\sum_{q=0}^{k} C_k^q \alpha_0(k-q)\alpha_q = \delta_k. \qquad (12)$$

Здесь

$$\alpha_0(v) = \sum_{i=0}^{N_0-1} i^v h_0(i); \qquad (13)$$

$$\alpha_v = \sum_{i=0}^{N-1} i^v h(i); \qquad (14)$$

v – е – моменты исходного и обратного фильтров.

Так как $h_0(i)$ известна, известны и моменты $\alpha_0(v)$. Из системы уравнений (12) могут быть определены моменты μ_q обратного фильтра:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\alpha_0(0)};\\ \alpha_k &= -\frac{1}{\alpha_0(0)}\sum_{q=0}^{k-1} C_k^q \alpha_0(k-q)\alpha_q,\ k=1,p. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Теперь задача сводится к синтезу обратного фильтра по критерию моментов

$$\sum_{i=0}^{v-1} h(i)i^v = \alpha_v,\ v=\overleftarrow{0,1}. \qquad (16)$$

Исследования показали, что для получения наилучшего результата наиболее эффективным способом весовую функцию обратного фильтра следует выбирать как взвешенную сумму исходных базисных функций

$$h(i)=\sum_{k=0}^{p}C_k C_{i+k}^{k}. \tag{17}$$

В этом случае система уравнений (12) примет вид

$$\sum_{k=0}^{p}C_k\sum_{i=0}^{N-1}C_{i+k}^{k}i^{\nu}=\alpha_{\nu},\ \nu=0,p. \tag{18}$$

Из этой системы уравнений определяется величина C_k :

$$C_k=\sum_{m=0}^{p}(-1)^{k+m}\frac{(p+k+1)!(p+m+1)!(N-m-1)!\Psi_{m+1}}{k!m!m!(p-k)!(p-m)!(m+k+1)(N+k)!},$$

где

$$\begin{cases}\Psi_0=\alpha_0\\ \Psi_m=\sum_{\nu=1}^{m}(-1)^{(m-\nu)}\beta_{m,\nu}\alpha_{\nu+1}\end{cases}.$$

Экспоненциальные базисные функции.

$$\begin{aligned}&\Psi_k(i)=\lambda^{(k+1)i};\\&\lambda=e^{\alpha\tau}.\end{aligned} \tag{19}$$

Сразу обратим внимание на то, что для этих параметрических функций

$$\alpha_0(k)\mu_k=1,\ k=0,p\ , \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned}&\alpha_0(k)=\sum_{i=0}^{N_0-1}h_0(i)\lambda^{(k+1)i};\\&\mu_k=\sum_{i=0}^{N-1}h(i)\lambda^{(k+1)i}.\end{aligned} \tag{21}$$

Из (20) и (21) получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{i=0}^{N-1}h(i)\lambda^{(k+1)i}=\frac{1}{\alpha_0(k)},\ k=\overleftarrow{0,p}. \tag{22}$$

Опять пришли к синтезу фильтра по критерию моментов.
Выбираем

$$h(i)=\sum_{\nu=0}^{p}C_{\nu}\lambda^{(\nu+1)i}. \tag{23}$$

Подставим $h(i)$ из (23) в (21), будем иметь

$$\sum_{\nu=0}^{p}C_{\nu}\frac{1-\lambda^{(k+\nu+2)N}}{1-\lambda^{k+\nu+2}}=\frac{1}{\lambda_0(k)},\ k=\overleftarrow{0,p}. \tag{24}$$

Решение данной системы находится по алгоритму:

$$\begin{cases} \Psi_{k,v} &= \dfrac{1-\lambda^{(k+v+2)N}}{1-\lambda^{k+v+2}} - \sum\limits_{q=0}^{v-1} C_{v,q}\Psi_{k,q} \\ C_{k,v} &= \dfrac{\Psi_{k,v}}{\Psi_{v,v}}, \\ k &= \overline{0,p}, \\ v &= \overline{0,k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(m,m) &= 1 \\ h(m,q) &= -\sum\limits_{k=q+1}^{m} h(m,k)C_{k,q} \\ m &= \overline{0,p}, \\ q &= \overline{0,m-1} \end{cases} \qquad (25)$$

$$C_v = \sum_{m=v}^{p} \frac{h(m,v)}{\Psi_{m,m}} \sum_{k=0}^{m} \frac{h(m,k)}{\alpha_0(k)}, \; v = \overleftarrow{p,0}.$$

Гармонические базисные функции с периодом N.

Данные базисные функции имеют вид

$$\Psi_k(i) = \begin{cases} \sin\dfrac{2ki\pi}{N}, & k = \overline{1,p}; \\ \cos\dfrac{2ki\pi}{N}, & k = \overline{0,p}. \end{cases} \qquad (26)$$

В этом случае система уравнений (10) примет вид

$$\begin{cases} \sum\limits_{v=0}^{N_0-1}\sum\limits_{i=0}^{N-1} h(i)h_0(v)\sin(\dfrac{2k(i+v)\pi}{N}) &= 0, \; k = \overline{1,p}; \\ \sum\limits_{v=0}^{N_0-1}\sum\limits_{i=0}^{N-1} h(i)h_0(v)\cos(\dfrac{2k(i+v)\pi}{N}) &= 1, \; k = \overline{0,p}. \end{cases}$$

После тригонометрических преобразований приведем эту систему к виду

$$\begin{cases} \alpha_0(k)\beta_k + \beta_0(k)\alpha_k = 0, & k = \overline{1,p}; \\ \beta_0(0)\beta_0 = 1 \\ \beta_0(k)\beta_k - \alpha_0(k)\alpha_k = 1, & k = \overline{1,p}. \end{cases} \qquad (27)$$

Здесь

$$\begin{cases} \alpha_0(k) &= \sum\limits_{i=0}^{N_0-1} h_0(i)\sin\dfrac{2ki\pi}{N}; \\ \beta_0(k) &= \sum\limits_{i=0}^{N_0-1} h_0(i)\cos\dfrac{2ki\pi}{N}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_k = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) \sin \frac{2ki\pi}{N}; \\ \beta_k = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) \sin \frac{2ki\pi}{N}. \end{cases} \tag{28}$$

Величины $\alpha_0(k)$ и $\beta_0(k)$ известны, т. к. определяются по известной весовой функции $h_0(i)$. Величины α_k и β_k находим из системы уравнений (27)

$$\begin{cases} \beta_0 \quad = \frac{1}{\beta_0(0)}; \\ \beta_k \quad = \frac{\beta_0(k)}{\alpha_0^2(k) + \beta_0^2(k)}; \\ \alpha_k \quad = -\frac{\alpha_0(k)}{\alpha_0^2(k) + \beta_0^2(k)}, k = 1, p. \end{cases} \tag{29}$$

Из (29) и (28) приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{N-1} h(i) = \frac{1}{\beta_0(0)}; \\ \sum_{i=0}^{N-1} h(i) \sin \frac{2ki\pi}{N} = -\frac{\alpha_0(k)}{\alpha_0^2(k) + \beta_0^2(k)}; \\ \sum_{i=0}^{N-1} h(i) \cos \frac{2ki\pi}{N} = -\frac{\beta_0(k)}{\alpha_0^2(k) + \beta_0^2(k)}, k = \overline{1, p}. \end{cases} \tag{30}$$

Выберем весовую функцию исследуемого фильтра в виде

$$h(i) = C_0 + \sum_{k=1}^{p} C_k \cos \frac{2ki\pi}{N} + \sum_{k=1}^{p} A_k \sin \frac{2ki\pi}{N}. \tag{31}$$

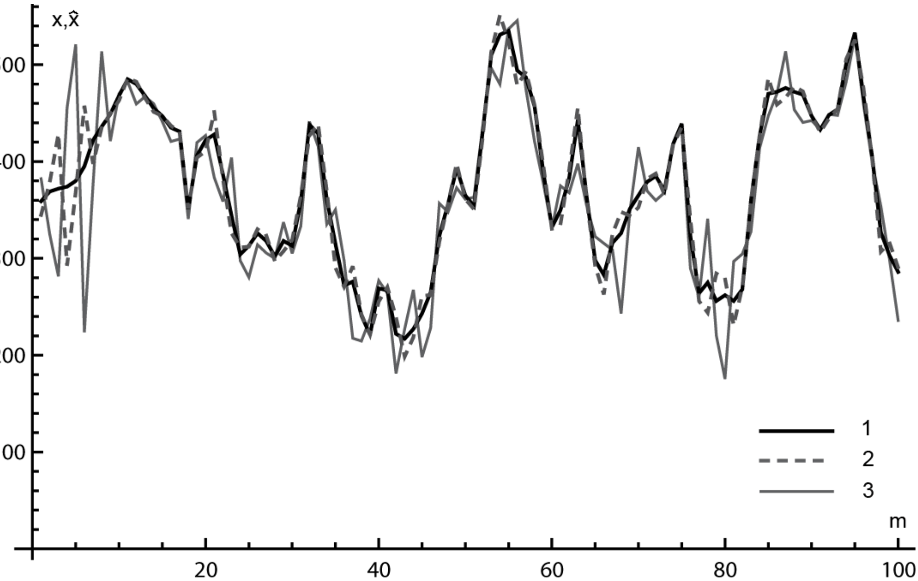
Подставив *h(i)* в систему уравнений (31) и приняв во внимание ортогональность базисных функций, после ряда преобразований будем иметь:

$$\begin{cases} C_0 \quad = \frac{1}{N\beta_0(0)}; \\ C_k \quad = \frac{2}{N} \frac{\beta_0(k)}{\alpha_0^2(k) + \beta_0^2(k)}; \\ A_k \quad = -\frac{2}{N} \frac{\alpha_0(k)}{\alpha_0^2(k) + \beta_0^2(k)}, k = \overline{1, p}. \end{cases} \tag{32}$$

И, наконец, подстановка значений C_k и β_k в (31) дает такую весовую функцию обратного фильтра:

$$h(i) = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{\beta_0(0)} + 2 \sum_{k=1}^{p} \frac{\beta_0(k) \cos \frac{2ki\pi}{N} - \alpha_0(k) \sin \frac{2ki\pi}{N}}{\alpha_0^2(k) + \beta_0^2(k)} \right). \tag{33}$$

Рассмотрим восстановление числовой последовательности из случайных значений, которая была обработана прямоугольным фильтром с весовой функцией $h_0=1/N_0$. Значения исходного и двух восстановленных рядов показаны на рисунке.



Исходный и восстановленные ряды:
1 – исходный ряд;
2 – восстановленный ряд, N_0 = 3, ширина обратного фильтра 6, количество моментов 4;
3 – восстановленный ряд, N_0 = 5, ширина обратного фильтра 6, количество моментов 4

Относительная средняя квадратическая погрешность (ОСП) восстановления вычислялась по формуле $\Delta = \| x - \hat{x} \| / \| x \|$. Полученные результаты при использовании полиномиальных базисных функций приведены в таблице.

Результаты восстановления последовательности

№ п/п	N_0	Ширина обратного фильтра	Кол-во моментов	ОСП	№ п/п	N_0	ОСП
1	3	3	2	0,05	11	5	0,06
2		4	2	0,07	12		0,07
3		5	2	0,10	13		0,08
4		4	3	0,055	14		0,07
5		5	3	0,053	15		0,06
6		6	3	0,08	16		0,06
7		5	4	0,06	17		0,07
8		6	4	0,04	18		0,07
9		7	4	0,06	19		0,07
10		9	4	0,11	10		0,07

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Батищев В.И., Золин А.Г., Косарев Д.Н., Романеев А.Е.* Аппроксимационный подход к решению обратных задач анализа и интерпретации экспериментальных данных // Вестник СамГТУ. Сер. Технические науки. – 2006. – Вып. 40. – С. 57-65.
2. *Леонов А.С.* Решение некорректно поставленных обратных задач. – М.: Либроком, 2010.
3. *Батищев В.И., Мелентьев В.С.* Аппроксимационные методы и системы промышленных измерений, контроля, испытаний, диагностики. – М.: Машиностроение, 2007. – 393 с.
4. *Батищев В.И., Волков И.И., Золин А.Г.* Построение и оптимизация ортогональных базисных систем для аппроксимации спектрально-корреляционного анализа и идентификации линейных динамических объектов // Вестник СамГТУ. Сер. Технические науки. – 2007. – Вып. 40. – С. 47-52.

Статья поступила в редакцию 5 сентября 2012 г.

SYNTHESIS OF FIR DIGITAL FILTERS FOR SOLVING SIGNAL RECONSTRUCTION USING CRITERIA OF MOMENTS

V.I. Batishchev, I.I. Volkov, A.G. Zolin

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The method of constructing the inverse digital filters for solving inverse problems of reconstruction of signals based on an approximation approach. The criterion used criterion of moments.

Keywords: *criterion points FIR filter, the weight function, the inverse filter.*

Vitaly I. Batishchev (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.
Igor I. Volkov (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.
Aleksey G. Zolin (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.