

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ

*А.А. Воронин, П.А. Кулаков*Самарский государственный технический университет  
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: samgtu-elst@yandex.ru

*В рамках интегральных динамических моделей электрической дуги получена модель с изменяющейся длиной и поперечным сечением дуги. Показано, что при конструировании контактно-дугогасительных систем коммутационных аппаратов целесообразно использовать модели дуги с изменяющимися геометрическими размерами. Проведено статистическое обоснование адекватности полученной модели дуги.*

**Ключевые слова:** электрическая дуга, интегральные динамические модели электрической дуги.

Для описания сложных физических явлений, происходящих в цепях, содержащих коммутационные аппараты, необходимо иметь математическую модель электрической дуги. Существует ряд подходов к моделированию дуги. Первый подход предполагает описание физических процессов в столбе дуги, что приводит к необходимости решения основных уравнений для дуговой плазмы. Решение же системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые описывают состояние дуговой плазмы, в сочетании с уравнениями цепи, в которой горит электрическая дуга, представляет собой нелегкую, а порой и неразрешимую задачу.

При втором подходе для построения математической модели дуги используется интегральное уравнение энергетического баланса. Такие модели целесообразно использовать при расчетах взаимодействия дуги в коммутационном аппарате и электрической цепи, в которой установлен этот аппарат. Для их построения достаточно иметь полученные при испытаниях осциллограммы тока и напряжения на дуге. Модели этого типа называются интегральными динамическими моделями электрической дуги [1] и представляют собой класс нелинейных дифференциальных уравнений первого, второго и более высоких порядков:

$$D(\vec{x}) = F(\vec{x}, \vec{a}), \quad (1)$$

где  $D(\vec{x})$  – нелинейный дифференциальный оператор первого, второго или более высокого порядка;

$F(\vec{x}, \vec{a})$  – нелинейная алгебраическая структура.

$x$  – независимые переменные состояния (ток, напряжение, проводимость, длина и сечение дуги);

$a$  – параметры модели дуги.

Разработаны динамические модели дуги с постоянными параметрами Майра и Касси [2, 3], переменными параметрами Шварца и Хохрайнера [4, 5], а также с изме-

*Александр Анатольевич Воронин (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Электрические станции».*

*Павел Алексеевич Кулаков (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Электрические станции».*

няющимися геометрическими размерами Ридера – Урбанека [6].

Исходя из сделанного в работе [1] обзора существующих интегральных моделей электрической дуги следует, что динамические модели дуги как с постоянными, так и с переменными параметрами позволяют достаточно просто и точно описать качественную картину гашения дуги и учесть влияние цепи на процесс коммутации. Если же необходимо не только правильно передать качественную картину, но и дать количественные оценки процесса гашения дуги в конкретной цепи, то двухпараметрические динамические модели [2-5] становятся непригодными. В случае же, если моделирование производится для разработки новой конструкции контактно-дугогасительной системы, целесообразно использовать модели дуги с изменяющимися геометрическими размерами. Модель с изменяющимися геометрическими размерами [6] хорошо согласуется с экспериментом, но содержит большое количество атомных характеристик среды, учет которых на практике чрезвычайно затруднителен. Особую актуальность модель дуги, содержащая в качестве переменных кроме электрических и геометрические характеристики дуги, имеет при анализе процессов дугогашения в цепях с параллельными дугами. Причем для облегчения работы она должна содержать минимальное число параметров, желательно не более трех, которые достаточно просто можно было бы определить по результатам коммутационных испытаний. Поэтому необходимо получить новую модель дуги с изменяющимися геометрическими размерами и разработать методику ее идентификации.

Практически во всех конструкциях коммутационных аппаратов длина и площадь поперечного сечения дуги, ее пространственное положение меняются во времени. Для того чтобы построить интегральную динамическую модель дуги отключения с учетом изменения длины и сечения столба дуги, необходимо провести исследование связей между изменяющимися во времени величинами тока, напряжения дуги и ее геометрическими размерами. Будем полагать, что плазма столба дуги квазинейтральна и термически равновесна. Уравнение теплового баланса для единицы объема столба дуги запишем в следующем виде:

$$\frac{dQ}{dt} = U \cdot I - P, \quad (2)$$

где  $Q$  – теплосодержание дуги, Дж;

$U$  – напряжение дуги, В;

$I$  – ток дуги, А;

$P$  – отводимая от ствола дуги мощность, Вт.

Уравнение (2) отличается от аналогичного уравнения теплового баланса, приводимого Майром [2], тем, что величина теплоотвода от ствола дуги  $P$  не считается постоянной величиной при гашении дуги. Кроме того, теплоотвод осуществляется не только посредством теплопроводности, но и при помощи других видов теплообмена.

Привлекая различные гипотезы о характере теплообмена дуги и распределении свойств по ее сечению, основываясь на уравнении (2), можно получить различные модели, описывающие динамическое состояние дуги.

Примем следующие допущения, которые облегчат проведение математических выкладок при получении модели, но в то же время не будут препятствовать использованию модели в практических расчетах [7]:

- 1) плазма однородна по сечению и длине столба дуги;
- 2) столб дуги имеет цилиндрическую форму с одинаковым сечением по всей длине;
- 3) теплоотвод от столба дуги осуществляется с боковой поверхности;

4) длина дуги и ее сечение могут изменяться во времени.

Выражения для полного теплосодержания дуги, ее проводимости, напряжения и величины теплоотвода с учетом принятых допущений будут иметь вид:

$$Q = Q_v \cdot l \cdot S, \quad (3)$$

$$g = \frac{g_v \cdot S}{l}, \quad (4)$$

$$U = E_o \cdot l, \quad (5)$$

$$P = P_o \cdot l \sqrt{4\pi \cdot S}, \quad (6)$$

где  $Q_v$  – теплосодержание в единице объема дуги, Дж/м<sup>3</sup>;  $g_v$  – удельная проводимость дуги, См/м;  $E_o$  – напряженность электрического поля дуги, В/м;  $P_o$  – отводимая от единицы поверхности дуги мощность, Вт/м<sup>2</sup>;  $g$  – проводимость дуги, См;  $S$  – площадь поперечного сечения дуги, м<sup>2</sup>;  $l$  – длина дуги, м;  $l\sqrt{4\pi \cdot S}$  – площадь боковой поверхности дуги, с которой производится теплоотвод, м<sup>2</sup>.

Для построения динамических интегральных моделей дуги необходимо иметь связь между удельной проводимостью и удельным теплосодержанием. Так, в модели Майра [2] эта связь описывается уравнением

$$g_v = \sigma_o \cdot e^{Q_v/Q_o}, \quad (7)$$

где  $\sigma_o$  и  $Q_o$  – параметры.

Уравнение (7) справедливо для идеального газа, который использовался Майром для облегчения математических выкладок. Позднее в работе [8] было дано экспериментальное подтверждение связи (7).

Подставим в уравнение (7) выражение для удельной проводимости  $g_v$  и теплосодержания в единице объема дуги  $Q_v$ , взятые из уравнений (4) и (3):

$$\frac{g \cdot l}{S} = \sigma_o \cdot e^{Q/S \cdot l \cdot Q_o}. \quad (8)$$

Логарифмируя выражение (8), найдем полное теплосодержание дуги:

$$Q = Q_o \cdot S \cdot l \cdot \ln \frac{g \cdot l}{\sigma_o \cdot S}. \quad (9)$$

Продифференцируем уравнение (9), считая изменяющимися во времени длину  $l$ , сечение  $S$  и проводимость дуги  $g$ :

$$\frac{dQ}{dt} = Q_o \cdot S \cdot l \cdot \left[ \frac{1}{g} \frac{dg}{dt} + \left( 1 + \ln \frac{g \cdot l}{\sigma_o S} \right) \frac{1}{l} \frac{dl}{dt} - \left( 1 - \ln \frac{g \cdot l}{\sigma_o S} \right) \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} \right]. \quad (10)$$

Подставив в уравнение (2) выражение (10) и произведя некоторые преобразования, получим динамическую модель электрической дуги с изменяющимися геометрическими размерами:

$$\frac{1}{g} \frac{dg}{dt} = \frac{P_o}{Q_o} \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{S}} \left( \frac{UI}{P_o l \sqrt{4\pi S}} - 1 \right) - \frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \left( 1 + \ln \frac{gl}{\sigma_o S} \right) + \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} \left( 1 - \ln \frac{gl}{\sigma_o S} \right). \quad (11)$$

Модель, описываемая уравнением (11), содержит три неизвестных параметра. Это величина теплоотвода от единицы поверхности дуги  $P_o$ , Вт/м<sup>2</sup>; количество тепла, при выносе которого из единицы объема столба (или подводе к столбу) удельная проводимость дуги изменяется в  $e = 2,7$  раза –  $Q_o$ , Дж/м<sup>3</sup>; коэффициент  $\sigma_o$  из урав-

нения (7), имеющий размерность удельной проводимости, См/м. Все три параметра  $P_o$ ,  $Q_o$ ,  $\sigma_o$ , входящие в модель (11), определяются по результатам эксперимента.

При неизменной длине и площади поперечного сечения дуги ( $\frac{dl}{dt} = 0$ ,  $\frac{dS}{dt} = 0$ ) модель (11) включает в себя как частные случаи такие известные динамические модели дуги, как модели Майра ( $P_o l \sqrt{4\pi S} = P_o$ ,  $\frac{Q_o}{P_o} \sqrt{\frac{S}{4\pi}} = \theta$ ) и Касси ( $P_o l \sqrt{4\pi S} = u_o^2 g$ ,  $\frac{Q_o}{P_o} \sqrt{\frac{S}{4\pi}} = \theta$ ). Модель Ридера – Урбанека также приводится к модели (11).

Для ряда характерных способов стабилизации дугового разряда в пространстве можно приблизительно считать неизменным либо сечение дуги, либо ее длину. При этом модель (11) несколько упрощается. Так, модель дуги с изменяющейся длиной при  $S = const$  имеет вид

$$\frac{1}{g} \frac{dg}{dt} = \frac{P_o}{Q_o} \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{S}} \left( \frac{UI}{P_o l \sqrt{4\pi S}} - 1 \right) - \frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \left( 1 + \ln \frac{gl}{\sigma_o S} \right). \quad (12)$$

Кроме описания дуги в коммутационных аппаратах, модель (12) может быть использована в качестве модели дуги в плазматронах, в которых наблюдается колебание длины дуги при неизменном сечении столба.

Если длина дуги при ее гашении не меняется во времени, как это имеет место в большинстве конструкций предохранителей и газовых выключателей ( $l = const$ ), то модель (11) можно использовать в следующем виде:

$$\frac{1}{g} \frac{dg}{dt} = \frac{P_o}{Q_o} \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{S}} \left( \frac{UI}{P_o l \sqrt{4\pi \cdot S}} - 1 \right) + \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} \left( 1 - \ln \frac{gl}{\sigma_o S} \right). \quad (13)$$

При неизменных длине и площади поперечного сечения дуги ( $\frac{dl}{dt} = 0$  и  $\frac{dS}{dt} = 0$ ) уравнение дуги (11) принимает вид

$$\Theta_o \frac{dg}{dt} = g \cdot \left( \frac{I^2}{g \cdot N} - 1 \right), \quad (14)$$

где  $\Theta_o = \frac{Q_o}{P_o} \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$  – постоянная времени дуги, с;  $N = P_o \cdot l \cdot \sqrt{4\pi S}$  – величина теплоотвода от ствола дуги, Вт.

Таким образом, полученные модели (11) – (13) наряду с электрическими переменными – током, напряжением, проводимостью дуги – включают в себя также геометрические характеристики дуги. Их можно использовать при проектировании контактно-дугогасительной системы коммутационного аппарата, а модель (14) – при анализе устойчивости горения дуги в электрических цепях.

Для того чтобы произвести проверку адекватности модели с изменяющимися геометрическими размерами, были проделаны эксперименты с растягивающейся дугой. Исследования проводились на макетном образце частотного коммутатора со скользящим жидкометаллическим контактом, принципиальная конструкция которого показана на рис. 1. Частотный коммутатор имеет подвижный твердометаллический контакт 1, выполненный в виде мостика, и два неподвижных контакта 2, 3. Не-

подвижные контакты смазаны жидким металлом 4. Подвижные твердометаллические контакты, сидящие на одном валу 5 и соединенные проводящей втулкой 6, приводятся во вращение с помощью приводного устройства (на рис. 1 не показано). В качестве жидкого металла использовался эвтектический сплав Ga–In–Sn. Приводом служил электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением с редукционным устройством. Привод позволял регулировать число оборотов от 60 до 1800 об/мин. Испытания проводились в лаборатории кафедры «Теоретические основы электротехники» Самарского государственного технического университета на стенде №1 с параметрами:  $U_{xx} = 65$  В,  $I_{кз} = 10 \div 190$  А. Процесс коммутации наблюдался на экране электронного осциллографа и фиксировался на фотопленку.

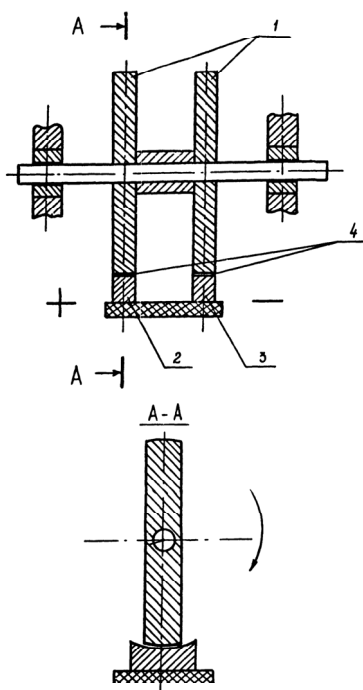


Рис. 1. Частотный коммутатор со скользящим жидкометаллическим контактом:

- 1 – подвижный контакт;
- 2, 3 – неподвижные контакты;
- 4 – жидкометаллический контакт;
- 5 – вал; 6 – токопроводящая втулка

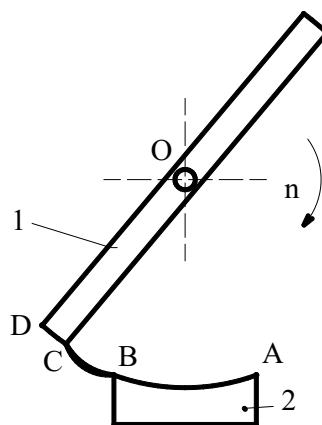


Рис. 2. Кинематическая схема коммутации:

- 1 – подвижный контакт;
- 2 – неподвижный контакт

Рассмотрим кинематику осуществления коммутации в частотном коммутаторе. На рис. 2 подвижный контакт вращается вокруг оси О. Когда точка D подвижного контакта и точка А неподвижного контакта совмещаются, происходит замыкание цепи. Цепь находится в замкнутом состоянии все время, пока точка D движется по дуге из точки А в точку В, затем точка С совместится с точкой В. Размыкание контактов происходит, когда точка С на подвижном контакте проходит точку В на неподвижном контакте.

При размыкании подвижных и неподвижных контактов между ними загоралась дуга. При растяжении на дугу действуют две силы: тангенциальная и нормальная. Под воздействием тангенциальной силы происходит растягивание дуги. Точка при-

вязки на подвижном контакте (точка С) движется по окружности, которую описывает подвижный контакт. Поэтому форма электрической дуги приблизительно будет иметь форму дуги этой окружности. Длина дуги изменяется в пределах от  $l_{нач}$  до  $l_{кон}$ . Время гашения дуги определялось по осциллограммам тока и напряжения, а длина дуги рассчитывалась по формуле

$$l_{дуги} = v \cdot t_{гаш}, \quad (15)$$

где  $v$  – скорость растяжения дуги, которая в данном случае приблизительно равна скорости расхождения контактов.

Скорость расхождения контактов, в свою очередь, равна линейной скорости движения точки С по окружности:

$$v = l_{окр} \cdot f = \pi \cdot D \cdot f, \quad (16)$$

где  $D$  – диаметр окружности (равен длине подвижного контакта);

$f$  – частота вращения подвижного контакта ( $f = n / 60$ ,  $n$  – число оборотов в мин).

Проверка адекватности модели дуги с изменяющейся длиной (14) производилась по трем осциллограммам с током отключения 190 А. Значения тока и напряжения с каждой осциллограммы табулировались с интервалом времени 0,0005 с. На рис. 3 приведены средние значения тока и напряжения, рассчитанные по формулам (17), и длина дуги, рассчитанная для  $D = 0,482$  м,  $n = 700$  об/мин,  $f = 11,6$  Гц,  $v = 17,6$  м/с.

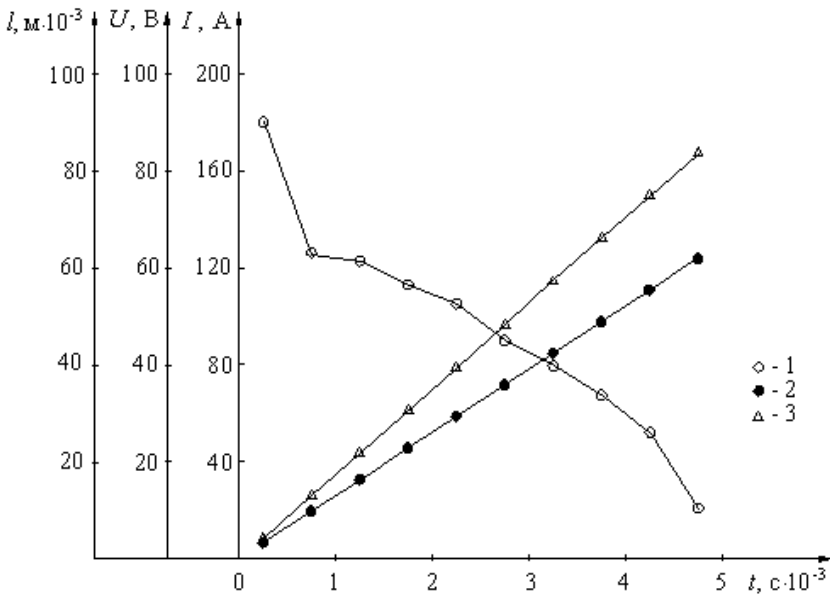


Рис. 3. Зависимости тока и напряжения (средние значения) длины дуги от времени: 1 – ток; 2 – напряжение; 3 – длина дуги

Среднее значение тока и напряжения определялось по формулам

$$\bar{I} = \frac{I_{1i} + I_{2i} + I_{3i}}{r}; \quad \bar{U} = \frac{U_{1i} + U_{2i} + U_{3i}}{r}, \quad (17)$$

где  $r$  – число осциллограмм; индекс 1, 2, 3 обозначает номер осциллограммы, а индекс  $i$  – значение переменной для различных моментов времени.

Дисперсии параллельных опытов определялись по формулам

$$s_{Ii}^2 = \frac{(I_{1i} - \bar{I}_i)^2 + (I_{2i} - \bar{I}_i)^2 + (I_{3i} - \bar{I}_i)^2}{r - 1};$$

$$s_{Ui}^2 = \frac{(U_{1i} - \bar{U}_i)^2 + (U_{2i} - \bar{U}_i)^2 + (U_{3i} - \bar{U}_i)^2}{r - 1}.$$

Затем определялась однородность дисперсий параллельных опытов по критерию Кохрена:

$$G_{Ip} = \frac{s_{Ii\max}^2}{\sum_{i=1}^n s_{Ii}^2} = \frac{169}{691.68} = 0.244; \quad G_{Up} = \frac{s_{Ui\max}^2}{\sum_{i=1}^n s_{Ui}^2} = \frac{48.67}{233.57} = 0.208.$$

Расчетное значение критерия сравнивалось с табличным для степеней свободы: числителя  $f_1 = 3 - 1 = 2$ , знаменателя  $f_2 = n = 10$  при выбранном уровне значимости  $\alpha = 0,05$  [9]:

$$G_{\text{табл}} = 0,44 > G_{Ip} = 0,244, \quad G_{\text{табл}} = 0,44 > G_{Up} = 0,208,$$

то есть гипотеза об однородности дисперсий параллельных опытов верна. Отсюда дисперсия воспроизводимости равна

$$s^2(I) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_{Ii}^2 = \frac{691.68}{10} = 69.168, \quad s^2(U) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_{Ui}^2 = \frac{233.57}{10} = 23.357,$$

а ошибка эксперимента

$$s(I) = \sqrt{s^2(I)} = \sqrt{69.168} = 8.32, \quad s(U) = \sqrt{s^2(U)} = \sqrt{23.357} = 4.83.$$

Определим дисперсию адекватности для равного числа параллельных опытов:

$$s_{адI}^2 = \frac{r}{n - \lambda} \sum_{i=1}^n (\bar{I}_i - \hat{I}_i)^2 = \frac{3}{10 - 3} \cdot 343.95 = 147.4,$$

$$s_{адU}^2 = \frac{r}{n - \lambda} \sum_{i=1}^n (\bar{U}_i - \hat{U}_i)^2 = \frac{3}{10 - 3} \cdot 127.47 = 54.6,$$

где  $\lambda$  – число значимых коэффициентов в модели;  $r$  – число параллельных опытов (число осциллограмм);  $n$  – число наблюдений в выборке.

Адекватность модели оценим с помощью  $F$ -критерия Фишера [9]:

$$F_{\text{расч I}} = \frac{s_{ад}^2}{s^2(I)} = \frac{147.4}{69.168} = 2.13,$$

$$F_{\text{расч U}} = \frac{s_{ад}^2}{s^2(U)} = \frac{54.6}{23.357} = 2.34.$$

Табличное значение критерия Фишера для степеней свободы

$$f_{ад} = n - \lambda = 10 - 3 = 7 \quad \text{и} \quad f_E = n \cdot (r - 1) = 10 \cdot (3 - 1) = 20$$

и принятого уровня значимости  $\alpha = 0,05$  будет  $F_{\text{табл}} = 2,52$ . Так как соотношения

$$F_{\text{расч I}} = 2.13 < F_{\text{табл}} = 2,52, \quad F_{\text{расч U}} = 2,34 < F_{\text{табл}} = 2,52$$

выполняются, то можно сделать вывод, что модель дуги с изменяющейся длиной (14) адекватно отражает процесс отключения в частотном коммутаторе со скользящим жидкометаллическим контактом.

## Выводы

1. Получена математическая модель электрической дуги отключения с изменяющимися геометрическими размерами, пригодная для использования при конструировании контактно-дугогасительных систем сильноточных коммутационных аппаратов. Произведено статистическое обоснование адекватности математической модели дуги.

2. Показано, что для ряда способов стабилизации дугового разряда в пространстве, характерных для различных видов коммутационных аппаратов, можно использовать упрощенные модели электрической дуги отключения: либо с изменяющейся длиной (12), либо с изменяющимся поперечным сечением (13).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новиков О.Я., Путько В.Ф., Танаев В.В., Воронин А.А. и др. Математические методы исследования динамики и проблемы управления низкотемпературной плазмой // Низкотемпературная плазма. Т. 2. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-е, 1991. – 257 с.
2. Mayr O. Beiträge zur Theorie des statischen und des dynamischen Lichtbogens // Arch. Elektrotechn. – 1943. – Bd. 7, № 12. – S. 588-608.
3. Cassie A.M. A new theory on rupture and circuit severity // CIGRE. – 1939. – Report 102. – P.1-14.
4. Schwarz J. Berechnung von Schaltvorgängen mit einer zweifach modifizierten Mayr – Gleichung // ETZ – A. – 1972. – Bd. 93, H. 7. – S. 386-389.
5. Hochrainer A. Eine regelungstechnische Betrachtung des elektrischen Lichtbogens («Кибернетическая» Theorie des Lichtbogens) // ETZ-A. – 1971. – Bd. 92. – S. 367-371.
6. Reider W., Urbaner J. New aspects of current zero research on circuit – breaker reignition. A theory of thermal non – equilibrium arc conditions // CIGRE. – 1966. – Report 107. – P. 1-14.
7. Воронин А.А., Кулаков П.А., Новиков О.Я. Идентификация и устойчивость электрической дуги // III Всесоюзная научно-техническая конференция «Проблемы нелинейной электротехники». Тез. докл. – Киев, 1988. – Ч. 3. – С. 86-88.
8. Jones G.R., Edels H. Electrical conductance decay of arc column in some common gases // Z. Phys. – 1969. – № 222. – P. 14-32.
9. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1965. – 474 с.

*Статья поступила в редакцию 5 сентября 2012 г.*

## MATHEMATICAL MODEL OF THE ELECTRIC ARC

**A.A. Voronin, P.A. Kulakov**

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

*The paper describes the model with the changing length and cross-section developed within integrated dynamic models of an electric arc. The research shows that it is rational to use arc models with changing geometrical sizes when designing contact-switch systems of switching devices. The paper provides the statistical justification of adequacy of the arc model developed.*

**Keywords:** *an electric arc, integrated dynamic models of an electric arc.*

---

*Alexander A. Voronin (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.  
Pavel A. Kulakov (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.*