УДК 007, 336.76

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ТОБИНА О РАЗДЕЛЕНИИ В УСЛОВИЯХ РОССИЙСКОГО ФИНАНСОВОГО РЫНКА

В.Г. Саркисов

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: vigen.sarkisov@mail.ru

Рассматривается вопрос применимости модели Тобина в условиях российского финансового рынка. Исследованы зависимости структуры портфеля от условий краткосрочного инвестирования и кредитования при различной степени неприятия риска инвестором. Предложена модификация теоремы о разделении, соответствующая ограничениям российского законодательства.

Ключевые слова: *модель Тобина, теорема о разделении, портфель, квалифицированный инвестор, ограничения.*

Классическое описание модели Тобина

Модель портфеля Тобина [1] описывает решение задачи Марковица при наличии возможности включения в портфель безрискового актива. Задача Марковица предполагает нахождение инвестиционного портфеля в результате оптимизации по критериям доходности и риска. В качестве меры доходности портфеля выбрано ее математическое ожидание $m_П$, а качестве меры риска – дисперсия доходности $V_П$ (или среднеквадратическое отклонение $\sigma_П = \sqrt{V_П}$).

Пусть структура портфеля описывается вектором долей активов a_0, …, a_n в портфеле: $x = (x_0, x_1, ..., x_n)$, где x_0 – доля безрискового актива a_0. Тогда задача Марковица может быть представлена в виде целевых функций (1) и (2) и ограничения (3):

$$m_П = \sum_{i=0}^{n} x_i m_i \to \max , \quad (1)$$

$$V_П = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} x_i x_k V_{ik} \to \min , \quad (2)$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = 1 , \quad (3)$$

где $m = (m_i)$ – вектор математических ожиданий доходностей активов, а $V = (V_{ik})$ – матрица ковариаций доходностей i-го и k-го активов (V_{ii} – дисперсия доходности i-го актива).

Теорема Тобина о разделении утверждает, что при одинаковой оценке инвесторами вектора m и матрицы V структура рисковой части оптимального портфеля не зависит от степени неприятия риска конкретным инвестором. Портфель при этом имеет следующую структуру:

$$x = \left(x_0, (1 - x_0) x_1^*, ..., (1 - x_0) x_n^*\right), \quad (4)$$

Виген Геннадьевич Саркисов (к.т.н.), докторант.

где доля безрискового актива x_0 определяется степенью неприятия риска инвестором, а вектор $x^* = (0, x_1^*, \ldots, x_n^*)$ описывает одинаковое для всех инвесторов распределение долей активов в рисковой части портфеля.

На рис. 1 представлен пример построения портфеля Тобина.

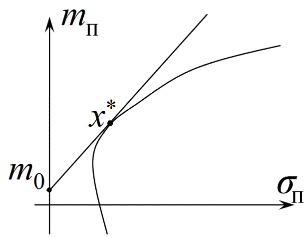

Рис. 1. Построение портфеля Тобина

Кривая представляет собой эффективную (по критериям (1) и (2)) границу множества рисковых портфелей (не включающих актив a_0). Точка с координатами $(0, m_0)$ соответствует портфелю, состоящему только из безрискового актива a_0. При включении в портфель безрискового актива эффективная граница представляет собой луч, исходящий из точки $(0,m_0)$ и касающийся кривой эффективной границы множества рисковых портфелей. Точка касания соответствует портфелю x^*, определяющему оптимальное соотношение долей рисковых активов. При смещении по лучу вправо относительно точки x^* формируются портфели, содержащие отрицательную долю безрискового актива, что соответствует кредитованию.

Допущения модели Тобина, невыполнимые при инвестировании на российском финансовом рынке

При использовании модели Тобина для проектирования систем управления инвестиционными портфелями на российском финансовом рынке возникают следующие противоречия:

1) ограничение (3) не соответствует ограничениям российского законодательства;

2) предположение о равенстве доходности безрискового актива ставке кредитования не соответствует действительности.

Рассмотрим более подробно законодательные ограничения. Законодательство [2] выделяет 2 вида инвесторов – квалифицированные и неквалифицированные. Допускается предоставление кредита (как для покупки, так и для продажи высоколиквидных активов) квалифицированным инвесторам в размере не более 300 % от собственных средств, а неквалифицированным – не более 100 %. При работе с низколиквидными активами кредиты не предоставляются. В общем виде ограничение на доли в портфеле

$$\sum_{i=0}^{n}\left[\begin{cases} x_i\big/\left(\lambda_i^L+1\right), & \text{при } x_i>0 \\ -x_i\big/\lambda_i^S, & \text{при } x_i<0 \end{cases}\right]=1, \qquad (5)$$

где λ_i^L и λ_i^S – размеры кредитов (по отношению к собственным средствам), предоставляемых данному инвестору для покупки или продажи i-го актива.

Предположение о равенстве ставок безрисковых вложений и кредитования также не соответствует действительности. Близкими к безрисковым можно считать вложения в государственные облигации (ОФЗ) с близкими сроками погашения. На момент написания данной работы доходность по таким облигациям составляет 5-6 %

годовых [3]. В то же время для частного инвестора доступно кредитование по ставке от 10 до 16 % годовых [4]. Столь сильное расхождение безрисковой доходности и ставки кредитования дает недопустимо большую погрешность расчета параметров портфелей в соответствии с моделью Тобина при $x_0 < 0$ (правее точки x^* на рис. 1).

Нахождение эффективной границы множества портфелей с учетом несоответствия ставок

С целью учета различия ставок рассмотрим отдельно четыре вида портфелей.

$П_1$ – портфели с безрисковым активом. Безрисковый актив a_0 имеет доходность m_0, соответствующую доходности реального безрискового актива. Портфели данного вида являются классическими портфелями Тобина и имеют структуру (4) с $x_0 \in [0; 1]$.

$П_2$ – рисковые портфели, сформированные на собственные средства инвестора (без кредитования и безрискового актива). Построение эффективной границы множества портфелей вида $П_2$ описано Г. Марковицем в [5]. Далее будем описывать эффективную границу множества портфелей $П_2$ функцией $m_П = \varphi_1(\sigma_П)$.

$П_3$ – портфели с кредитованием. Кредитование может описываться при помощи включения в портфель отрицательной доли x'_0 ($x'_0 < 0$) безрискового актива a'_0 с доходностью m'_0, равной ставке кредитования ($m'_0 > m_0$).

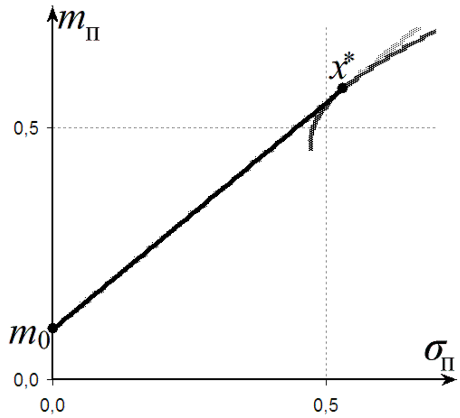

Рис. 2. $П_1$ – портфели с безрисковым активом

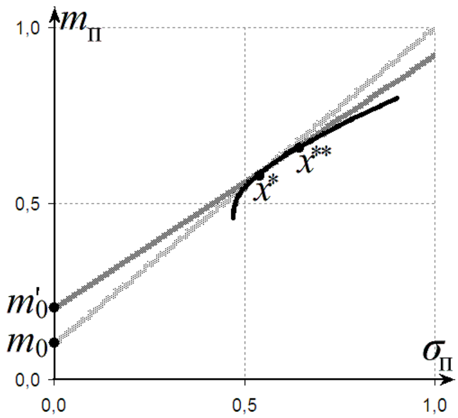

Рис. 3. $П_2$ – чисто рисковые портфели без кредитования

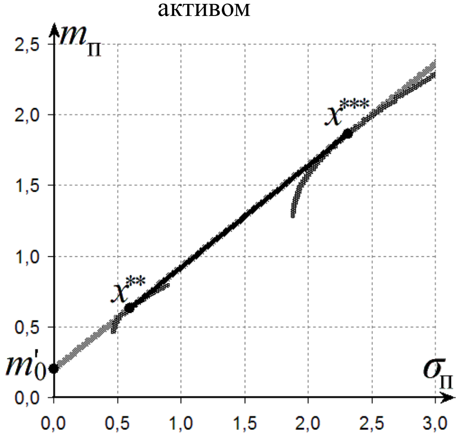

Рис. 4. $П_3$ – портфели с кредитованием

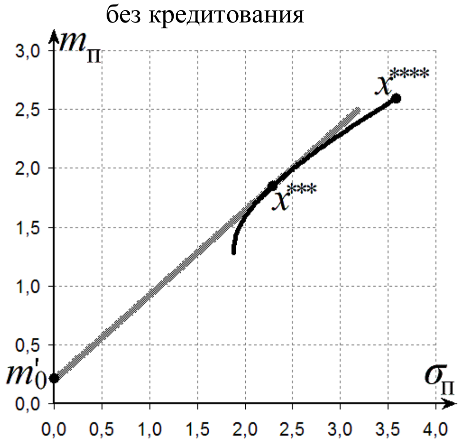

Рис. 5. $П_4$ – портфели с максимальным уровнем кредитования

$П_4$ – портфели с максимальным уровнем кредитования $x'_0 = -x'_{0\,пред}$ (где $x'_{0\,пред}$ – предельный объем кредитования). Построение эффективной границы аналогично $П_2$. Будем описывать эффективную границу множества портфелей вида $П_4$ функцией $m_П = \varphi_2(\sigma_П)$.

На рис. 2-5 представлены примеры портфелей $П_1$ – $П_4$. Жирной линией выделена реализуемая часть эффективной границы каждого вида портфелей.

При наличии возможности выбора между портфелями с одинаковым уровнем риска $\sigma_П$ более эффективным является портфель с большей доходностью $m_П$. Выбирая более эффективный из реализуемых портфелей для каждого уровня риска, получим эффективную границу, представленную на рис. 6.

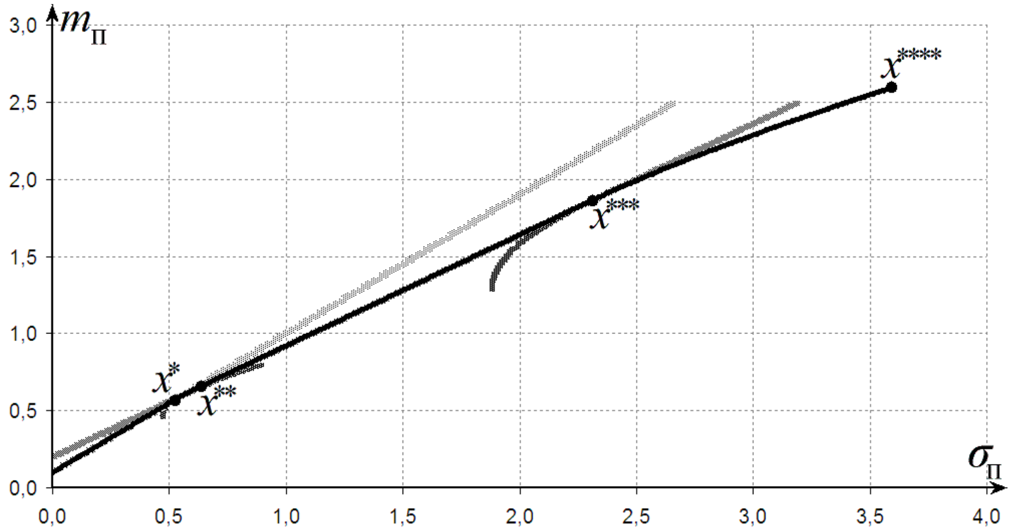

Рис. 6. Эффективная граница множества реализуемых портфелей

Описание эффективной границы предполагает следующие этапы:

1) нахождение с помощью теории Марковица зависимостей $m_П = \varphi_1(\sigma_П)$ и $m_П = \varphi_2(\sigma_П)$;

2) нахождение структур и характеристик ($m_П$ и $\sigma_П$) портфелей x^*, x^{**}, x^{***} и x^{****}, определяющих границы применимости различных видов портфелей (кроме того, x^* и x^{**} определяют и структуру рисковой части портфелей $П_1$ и $П_3$);

3) описание структуры и характеристик всех портфелей, составляющих эффективную границу.

Характеристики m^* и σ^* портфеля x^* соответствуют точке касания луча, исходящего из точки $(0,\ m_0)$, и кривой $m_П = \varphi_1(\sigma_П)$. Точка $(\sigma^*,\ m^*)$ может быть найдена из уравнения

$$m^* - m_0 = \sigma^* \frac{d}{d\sigma}\varphi_1\left(\sigma^*\right). \tag{6}$$

Аналогично (6) могут быть определены и точки x^{**} и x^{***}, с тем лишь отличием, что луч исходит из точки $(0,\ m'_0)$:

$$m^{**} - m'_0 = \sigma^{**} \frac{d}{d\sigma}\varphi_1\left(\sigma^{**}\right); \tag{7}$$

$$m^{***} - m'_0 = \sigma^{***} \frac{d}{d\sigma}\varphi_2\left(\sigma^{***}\right). \tag{8}$$

При решении одного или нескольких из уравнений (6) – (8) может возникнуть ситуация, когда найденная точка x^*, x^{**} или x^{***} окажется вне множества реализуемых портфелей ($П_2$ или $П_4$). В этом случае в качестве x^*, x^{**} или x^{***} следует выбрать ближайший к найденному реализуемый портфель из соответствующего множества.

Портфель x^{****} – с максимальным уровнем кредитования, состоящий полностью из актива с максимальной доходностью.

Опишем портфели, составляющие эффективную границу. Для этого введем обозначения структур портфелей:

$x = (x_0, x'_0, x_1, \ldots, x_n)$ – общий вид структуры портфеля, где x_0 – доля реального безрискового актива ($x_0 \in [0, 1]$), x'_0 – доля безрискового инструмента, соответствующего кредитованию ($x'_0 \in [-x'_{0\,\text{пред}}, 0]$);

$x^* = (0, 0, x_1^*, \ldots, x_n^*)$, $x^{**} = (0, 0, x_1^{**}, \ldots, x_n^{**})$ – чисто рисковые портфели без кредитования, определяющие переходы эффективной границы между множествами $П_1$, $П_2$ и $П_3$;

$x^{***} = (0, -x'_{0\,\text{пред}}, (1+x'_{0\,\text{пред}})x_1^{**}, \ldots, (1+x'_{0\,\text{пред}})x_n^{**})$ – портфель с предельным уровнем кредитования, определяющий переход эффективной границы между множествами $П_3$ и $П_4$;

$x^{****} = (0, -x'_{0\,\text{пред}}, 0, \ldots, 0, 1+x'_{0\,\text{пред}}, 0, \ldots, 0)$ – портфель с максимальной возможной доходностью, где доля $1+x'_{0\,\text{пред}}$ соответствует активу с максимальной доходностью.

Эффективная граница множества портфелей может быть описана формулой

$$m_П = \begin{cases} m_0 + \sigma_П \varphi'_1(\sigma^*), \sigma_П \in [0, \sigma^*] \\ \varphi_1(\sigma_П), \sigma_П \in [\sigma^*, \sigma^{**}] \\ m'_0 + \sigma_П \varphi'_2(\sigma^{**}), \sigma_П \in [\sigma^{**}, \sigma^{***}] \\ \varphi_2(\sigma_П), \sigma_П \in [\sigma^{***}, \sigma^{****}] \end{cases}. \qquad (9)$$

При этом структура портфелей $П_2$ и $П_4$ определяется моделью Марковица, а портфелей $П_1$ и $П_3$ – формулами (10) и (11) соответственно:

$$x = \left(1 - \frac{\sigma_П}{\sigma^*}, 0, \frac{\sigma_П}{\sigma^*} x_1^*, \ldots, \frac{\sigma_П}{\sigma^*} x_n^*\right), \forall \sigma_П \in \left[0, \sigma^*\right], \qquad (10)$$

$$x = \left(0,\ 1 - \frac{\sigma_П}{\sigma^{**}}, \frac{\sigma_П}{\sigma^{**}} x_1^{**}, \ldots, \frac{\sigma_П}{\sigma^{**}} x_n^{**}\right), \forall \sigma_П \in \left[\sigma^{**}, \sigma^{***}\right]. \qquad (11)$$

Проведенный анализ показал, что в условиях современного российского финансового рынка теорема Тобина о разделении корректно описывает частный случай, когда $\sigma_П \in [0, \sigma^*]$. Обобщая формулировку для случая более высоких рисков, можно сформулировать следующую теорему.

Модифицированная теорема Тобина о разделении

При одинаковой оценке инвесторами вектора m и матрицы V эффективная (по (1) и (2)) граница множества портфелей определяется (9), структура рисковой части портфеля при $\sigma_П \in [0, \sigma^*]$ и $\sigma_П \in [\sigma^{**}, \sigma^{***}]$ не зависит от степени неприятия риска инвестором, зависимость структур оптимальных портфелей от допустимого риска определяется выражениями (10) и (11), а при $\sigma_П \in [\sigma^*, \sigma^{**}] \cup [\sigma^{***}, \sigma^{****}]$ структура рисковой части зависит от степени неприятия риска, общая структура портфеля определяется моделью Марковица с ограничением вида (5).

Заключение

В настоящей работе показано, что теорема Тобина, утверждающая независимость структуры рисковой части инвестиционного портфеля от неприятия риска инвестором, не отражает современных условий кредитования и безрискового инвестирования на российском финансовом рынке. Выделены области применимости классической формулировки теоремы Тобина. Сформулирована обобщенная теорема, описывающая эффективную границу множества инвестиционных портфелей (и их структуры), по отношению к которой теорема Тобина представляет собой частный случай.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК:

1. *Tobin J.* Liquidity Preference as Behavior Towards Risk // Review Of Economic Studies. – 1958. – № 67. – С. 65-86.
2. Положение о порядке признания лиц квалифицированными инвесторами (приказ ФСФР России от 18.03.2008 №08-12/пз-н).
3. ММВБ – Итоги торгов [Электронный ресурс]. – http://www.micex.ru/marketdata/quotes?group=stock_shares&data_type=history
4. ЗАО Финам. Тарифы и цены на брокерское обслуживание [Электронный ресурс]. – http://www.finam.ru/services/CommissionRates/default.asp
5. Markowitz H. Portfolio selection // The Journal Of Finance. – 1952. – № 1. – С. 77-91.

Статья поступила в редакцию 12 декабря 2012 г.

SYSTEM ANALYSIS OF APPLICATION OF THE TOBIN'S SEPARATION THEOREM TO RUSSIAN FINANCIAL MARKET

V.G. Sarkisov

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The issue of the Tobin's model applicability in the Russian financial market conditions is considered. Dependences of a portfolio structure on short-term investment and crediting rates are investigated at various investor's risk rejection levels. Modification of the separation theorem, corresponding to restrictions of the Russian legislation is offered.

Keywords: *Tobin's model, the separation theorem, portfolio, qualified investor, restrictions.*

Vigen G. Sarkisov (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.