

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ МНОГОЭЛЕКТРОДНЫХ ЭЛЕКТРОЕМКОСТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ПРИ ПОПЕРЕЧНО-СКВОЗНОМ ЗОНДИРОВАНИИ ПОТОКА

Ю.И. Стеблев, С.В. Сусарев, Е.С. Вашуркина

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Проведен расчет электрических полей и параметров многоэлектродных электроемкостных преобразователей (МЭП) влагомеров нефти при поперечно-сквозном зондировании потока. Получены аналитические выражения для потенциалов и компонент напряженности электрического поля в зоне контроля, разработаны алгоритмы их расчета, на их основе проведен анализ распределения зондирующих полей, позволяющий оценить размеры зоны контроля и закономерности формирования выходных сигналов преобразователей при поперечно-сквозном зондировании потока.

Ключевые слова: *многоэлектродный электроемкостный преобразователь, зондирование, конструктивный зазор, нефть, моделирование.*

Одна из актуальных проблем нефтедобывающей отрасли – повышение эффективности оперативного управления и контроля добываемой продукции на нефтегазовых скважинах, групповых замерных установках, дожимных насосных станциях и установках подготовки промысловой нефти. Оперативный контроль обводненности промысловой нефти дает возможность управлять процессом эксплуатации месторождения: следить за продвижением водонефтяного контакта в контуре заводнения, организовывать предварительный сброс воды из продукции нефтяных скважин, оптимизировать технологию подготовки промысловой нефти. Для зондирования этих физических сред наиболее целесообразно использовать электромагнитные поля электрического типа, то есть электроемкостные преобразователи. Электроемкостные преобразователи используют в диэлектрическом методе влагометрии, основанном на измерении диэлектрической проницаемости смеси «нефть – вода».

Разработка расчетно-теоретических и физических моделей МЭП базируется на учете конфигурации измерительных электродов и схемах электрического зондирования контролируемого потока. Применение квазистатического приближения позволяет свести расчет переменных электрических полей и параметров МЭП к решению ряда электростатических задач, оперируя при этом комплексными величинами: векторами поля, диэлектрической проницаемостью, комплексной емкостью и проводимостью между электродами.

Условие применимости уравнений квазистатического поля формируется следующим образом [1]:

$$\lambda \gg l, \quad (1)$$

Юрий Иванович Стеблев (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Автоматизация и управление технологическими процессами».

Сергей Васильевич Сусарев (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Автоматизация и управление технологическими процессами».

Екатерина Сергеевна Вашуркина, ст. преподаватель кафедры «Автоматизация и управление технологическими процессами».

где λ – длина волны в среде;

l – характерный размер области, в которой рассчитывается поле, например длина электродов МЭП.

Условие (1) можно конкретизировать таким образом [2]: максимальный размер l электрода не должен превышать одной десятой длины электромагнитной волны λ в контролируемой среде – $l \leq 0,1\lambda$.

Квазистатическое приближение для расчета электрических полей и параметров МЭП означает, что во всех точках измерительных электродов обеспечивается одинаковое напряжение (потенциал), то есть электроды эквипотенциальны, и для анализа выходных сигналов МЭП можно использовать теорию цепей с сосредоточенными параметрами.

Если электромагнитное поле изменяется во времени по гармоническому закону с временным множителем $e^{j\omega t}$, то первое уравнение Максвелла для комплексных амплитуд векторов напряженности электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей в области, где отсутствуют сторонние источники, запишется так:

$$\text{rot } \vec{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon_0\varepsilon) \vec{E} = j\omega\varepsilon_0(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}) \vec{E} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_k \vec{E}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_k = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}$ – относительная комплексная диэлектрическая проницаемость

среды; $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{M}$ – диэлектрическая проницаемость вакуума;

ω – круговая частота; $j = \sqrt{-1}$.

Уравнение (2) позволяет рассматривать физическую среду как диэлектрик с комплексной диэлектрической проницаемостью ε_k .

Структура зондирующих электрических полей при поперечно-сквозном зондировании потока (рис. 1) может быть рассчитана в результате решения внутренней задачи Дирихле для круга при условии, что ширина конструктивных зазоров между электродами стремится к нулю.

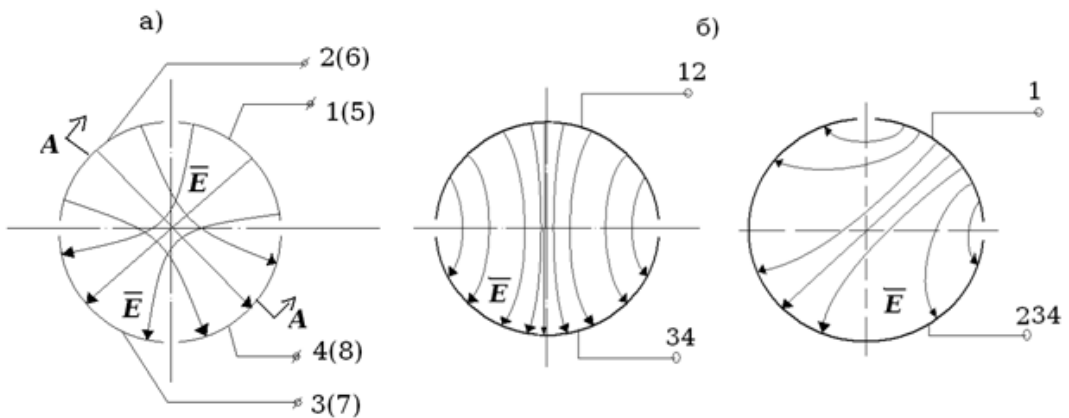


Рис. 1. Схемы поперечно-сквозного зондирования контролируемого потока:

а – исходная схема (1 – 8 – номера измерительных электродов);

б – преобразованные схемы (12 – короткое замыкание электродов 1 и 2; 34 – короткое замыкание электродов 3 и 4; 234 – короткое замыкание электродов 2, 3 и 4)

На рис. 2 приведена расчетная модель N-электродного преобразователя в цилиндрической системе координат (ρ, θ) .

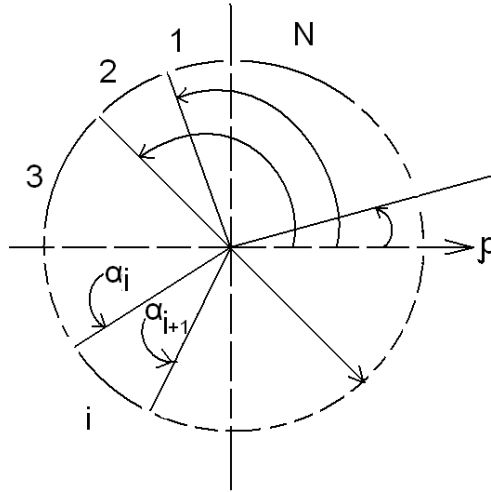


Рис. 2. Расчетная модель N-электродного электроемкостного преобразователя

Определим потенциал электрического поля МЭП, содержащего N электродов (рис. 2), заряженных до значений потенциалов $U_i, i = \overline{1, N}$. Если электроды имеют разные размеры, то их угловые координаты обозначим $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ или $\alpha_i, i = \overline{1, N}$, причем $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_N = 2\pi$.

В случае N-электродного преобразователя $f(\alpha)$ – кусочно-постоянная функция, принимающая дискретные значения, соответствующие электрическим потенциалам электродов:

$$f(\alpha) = U_{i+1} \text{ при } \alpha_i < \alpha < \alpha_{i+1}, i = \overline{0, N-1}. \quad (3)$$

Тогда электрический потенциал поля в рабочей области МЭП с электродами, имеющими различные угловые размеры, запишем в виде

$$U(\rho, \theta) = \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{U_{i+1} d\alpha}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \alpha)}. \quad (4)$$

Если электроды МЭП имеют одинаковые угловые размеры $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{N}$, то их угловые координаты $\alpha_i = \frac{2\pi}{N}i, i = \overline{0, N-1}$, а уравнение (4) преобразуется следующим образом:

$$U(\rho, \theta) = \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\frac{2\pi}{N}i}^{\frac{2\pi}{N}(i+1)} \frac{U_{i+1} d\alpha}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \alpha)}. \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) позволяет выполнить численные расчеты электрического поля в рабочей области МЭП при различных значениях потенциалов его электродов. Однако эти уравнения могут быть представлены в конечном виде, если привести ин-

теграл, входящий в них, к табличному, что особенно важно при синтезе зондирующих электрических полей.

После преобразования формулы интегрирования уравнение для электрического потенциала в рабочей области N-электродного преобразователя примет вид

$$U(\rho, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{N-1} U \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{R-\rho}{R+\rho} \operatorname{tg} \frac{x_{i+1}}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{R+\rho}{R-\rho} \operatorname{tg} \frac{x_i}{2} \right) \right]. \quad (6)$$

Из общего уравнения (6) может быть получен ряд частных случаев, соответствующих различным схемам поперечно-сквозного зондирования потока.

Так, при $N = 2$ получим схему зондирования потока двумя полуцилиндрическими электродами (рис. 1, б). Положив $U_1 = -U_2 = U_{01}$, получим

$$U(\rho, \theta) = \frac{2U_0}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{R+\rho}{R-\rho} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{R+\rho}{R-\rho} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right]. \quad (7)$$

После преобразования уравнение (5) примет вид

$$U(\rho, \theta) = \frac{2U_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2R\rho \sin \theta}{R^2 - \rho^2}. \quad (8)$$

Рассмотрим схему поперечно-сквозного зондирования при $N=4$ (рис. 1, а). При этом $U_1 = -U_3 = U_0$ и $U_2 = U_4 = 0$, а уравнение (6) примет вид

$$U(\rho, \theta) = \frac{1}{\pi} U_1 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{R+\rho}{R-\rho} \operatorname{tg} \frac{x_1}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{R+\rho}{R-\rho} \operatorname{tg} \frac{x_0}{2} \right) \right] + \frac{1}{\pi} U_3 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{R+\rho}{R-\rho} \operatorname{tg} \frac{x_3}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{R+\rho}{R-\rho} \operatorname{tg} \frac{x_2}{2} \right) \right] \quad (9)$$

Подставив в уравнение (9) угловые координаты электродов для переменных x_0, x_1, x_2, x_3 , получим $x_0 = -\theta, x_1 = \frac{\pi}{2} - \theta, x_2 = \pi - \theta, x_3 = \frac{3}{2}\pi - \theta$.

После преобразования уравнения (9) получим распределение электрического потенциала в рабочей области МЭП при использовании поперечно-сквозного зондирования потока (рис. 3):

$$U(\rho, \theta) = \frac{U_0}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{R+\rho}{R-\rho} \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{R+\rho}{R-\rho} \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \right) \right] + \frac{U_0}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{R+\rho}{R-\rho} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{R+\rho}{R-\rho} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right) \right]. \quad (10)$$

По найденному потенциалу $U(\rho, \theta)$ определим компоненты напряженности зондирующего электрического поля в цилиндрической системе координат:

$$E_\rho(\rho, \theta) = -\frac{\partial U}{\partial \rho}; \quad E_\theta(\rho, \theta) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta}. \quad (11)$$

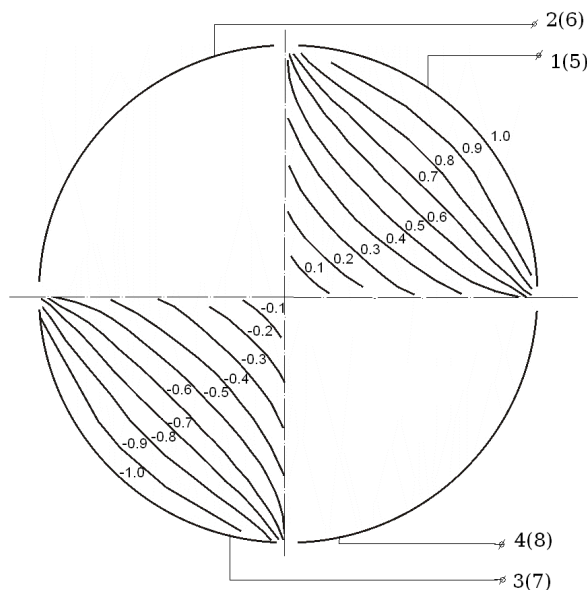


Рис. 3. Распределение электрического потенциала в рабочей области МЭП при использовании поперечно-сквозного зондирования потока

Так, используя уравнение (8), получим

$$E_{\rho}(\rho, \theta) = -\frac{2U_0}{\pi} \frac{R(R^2 + \rho^2)\cos\theta}{(R^2 - \rho^2)^2 + (2R\rho\cos\theta)^2}; \rho \leq R; \quad (12)$$

$$E_{\theta}(\rho, \theta) = \frac{2U_0}{\pi} \frac{R(R^2 - \rho^2)\sin\theta}{(R^2 - \rho^2)^2 + (2R\rho\cos\theta)^2}; \rho \leq R.$$

Модуль вектора напряженности электрического поля

$$E(\rho, \theta) = \sqrt{E_{\rho}^2 + E_{\theta}^2} = \frac{2RU_0}{\pi} \frac{\sqrt{R^4 + \rho^4 + 2R^2\rho^2\cos 2\theta}}{(R^2 - \rho^2)^2 + (2R\rho\cos\theta)^2}. \quad (13)$$

Для определения величины емкости между электродами необходимо знать распределение плотности электрического заряда $\sigma(R, \theta)$ на электродах, которая связана с нормальной к поверхности проводника составляющей напряженности поля E_n соотношением

$$\sigma(R, \theta) = \varepsilon_0 \varepsilon E_n(R, \theta). \quad (14)$$

Тогда емкость между парой измерительных электродов МЭП найдем по величине заряда q на электродах:

$$C = \frac{q}{2U}; \quad q = \int_s \sigma(R, \theta) dS, \quad (15)$$

где S – площадь электрода; $2U$ – напряжение, приложенное к электродам.

Используя соотношение (12), получим

$$E_n(R, \theta) = |E_{\rho}(R, \theta)| = \frac{2U_0}{\pi} \frac{1}{R \cos\theta}; \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (16)$$

Из уравнения (16) следует, что в точках $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ величина $E_p \longrightarrow \infty$. Физиче-

ски значения $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ соответствуют нулевой величине зазора между электродами.

Такая ситуация является типичной при расчете электрических полей в системе проводников с острыми кромками [3, 4]. При вычислении интегральных параметров электрического поля, к которым относится емкость, эти особые точки необходимо исключить.

Особенностью математических моделей МЭП является наличие острых кромок на границах электродов. Под кромкой помещается край электрода, наиболее напряженный в электрическом поле [3]. Кромки электродов МЭП относятся к математически острым кромкам с нулевым углом раскрытия, малая толщина которых не позволяет сделать закругление. Понятие «кромка» можно формализовать, представив электрод в виде сходящихся под углом 2 полубесконечных плоскостей. Распределение потенциала вокруг электродов с математически острыми кромками показывает, что напряженность электрического поля на кромке достигает бесконечности, то есть электрическое поле вблизи кромки имеет резко неоднородный характер [3, 4].

Чтобы исключить особую точку электрического поля – острую кромку при расчете интегральных параметров электрического поля, например емкости между двумя электродами, вычисление производится не у математически острой кромки, а на малом удалении от нее, где напряженность поля уже имеет конечное значение.

Сравнивались расчетные данные с параметрами реального кабеля с толщиной экрана d , несколько превышающим удвоенный радиус закругления кромки экрана, причем форма этого закругления близка к полукругу. Чтобы отклонения от этого профиля не оказывали заметного влияния на величину расчетной емкости, необходимо выполнение соотношения

$$\frac{d}{2R\gamma} < 0,15, \quad (17)$$

где d – толщина экрана; R – радиус цилиндрической оболочки; 2γ – угловой зазор между оболочками.

Из (17) следует, что теоретическая формула для емкости применима, когда половина ширины зазора между оболочками $R\gamma$ в 7-8 раз больше половины толщины стенки экрана d . При меньших углах раствора γ полученная приближенная формула неприменима [4].

Таким образом, при расчете выходного сигнала МЭП – межэлектродной емкости (17) необходимо исключить особые точки электрического поля. Удаление от острой кромки при вычислении межэлектродной емкости МЭП эквивалентно видению некоторого эквивалентного зазора между соседними электродами с угловым размером $2\gamma = h/R$, где h – длина зазора по дуге радиусом R .

Так, для схемы поперечно-сквозного зондирования на рис. 1, б при том, что полцилиндрический электрод расположен в диапазоне углов θ от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, формула (15) для величины заряда q на единицу длины электрода примет следующий вид:

$$q = \int_{-\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}^{\frac{\pi}{2}-\gamma} \sigma(R, \theta) R d\theta; \quad \sigma = \varepsilon_0 \varepsilon |E_p(R, \theta)| = \frac{2U_0}{\pi} \frac{1}{R \cos \theta}. \quad (18)$$

Выполним интегрирование, получим:

$$\frac{C}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{1 + \cos \gamma}{1 - \cos \gamma} \right) = \frac{2}{\pi} \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \right); \quad 0,02 \leq \gamma \leq 0,08. \quad (19)$$

Полученные аналитические выражения для потенциалов позволяют определить структуру зондирующего электрического поля в рабочей области МЭП. При этом представляют интерес как распределение потенциала, так и напряженности электрического поля. Наиболее информативным представлением электрического потенциала является его графическое изображение в виде линий равного потенциала – эквипотенциальных линий. Для случая поперечно-сквозного зондирования, описываемого уравнением (8), линии равного потенциала строятся на основе соотношения

$$\frac{1}{R^2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi U}{2 U_0} \right) \rho^2 + \left(\frac{2}{R} \cos \theta \right) \rho - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi U}{2 U_0} \right) = 0. \quad (20)$$

На рис. 4 приведена структура электрического потенциала зондирующего поля МЭП с электродами в виде полуцилиндров.

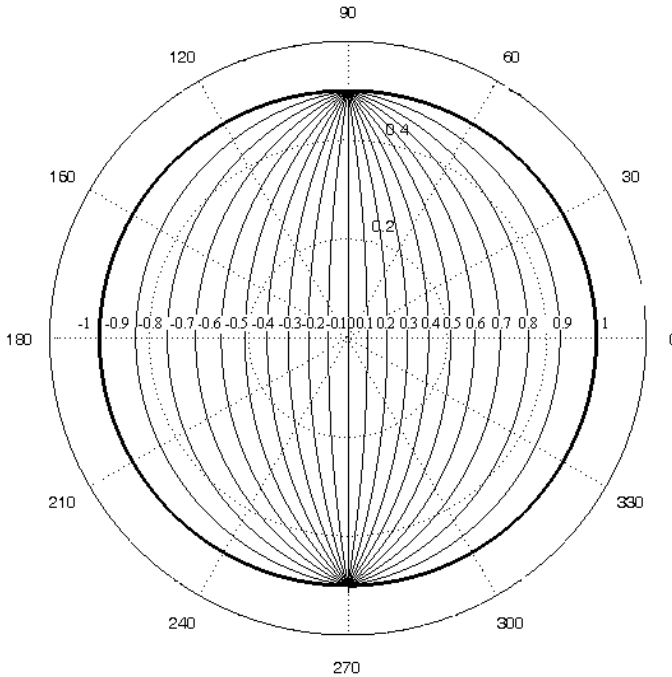


Рис. 4. Структура электрического потенциала полуцилиндрических электродов при поперечно-сквозном зондировании потока

Подобное графическое изображение дает общее представление о структуре зондирующего поля и позволяет определить компоненты напряженности электрического поля в различных зонах рабочей области МЭП. Компоненты напряженности электрического поля $E_\rho(\rho, \theta)$ и $E_\theta(\rho, \theta)$ могут быть определены по формулам (11).

На рис. 5 приведены распределения ортогональных составляющих напряженности E_ρ и E_θ электрического поля в нормированном виде, полученные по следующим уравнениям:

$$\frac{E_\rho(\rho, \theta)}{E_0} = -\frac{2}{\pi} \frac{(1+r^2)\cos\theta}{(1-r^2)^2 + (2r\cos\theta)^2};$$

$$\frac{E_\theta(\rho, \theta)}{E_0} = \frac{2}{\pi} \frac{(1-r^2)\sin\theta}{(1-r^2)^2 + (2r\cos\theta)^2},$$
(21)

где $E_0 = \frac{U_0}{R}$; $r = \frac{\rho}{R}$.

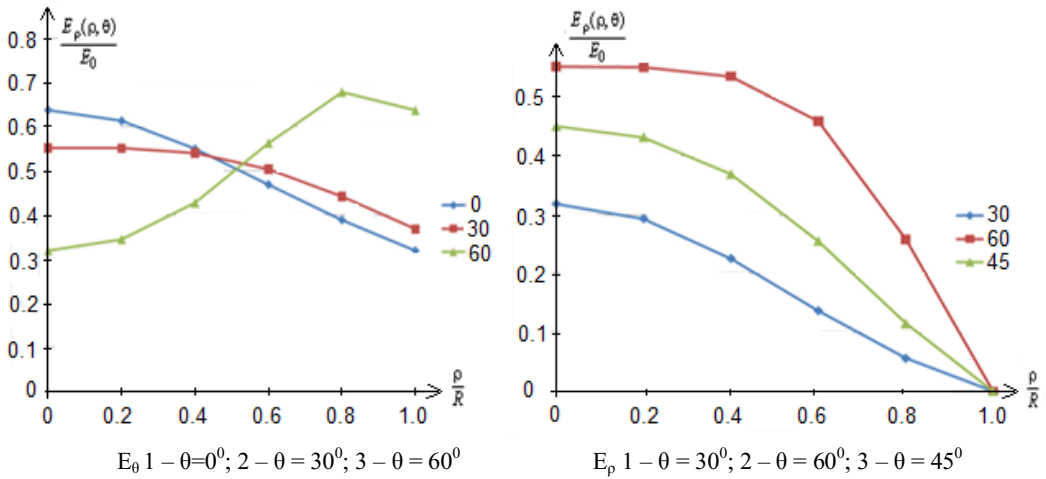


Рис. 5. Распределение компонент напряженности электрического поля МЭП с полуцилиндрическими электродами

Таким образом, в статье на основе классической задачи Дирихле для круга разработана математическая модель N-электродного преобразователя при поперечно-сквозном зондировании потока при условии, что ширина конструктивных зазоров между электродами стремится к нулю. Получены аналитические выражения для потенциалов и компонент напряженности электрического поля в зоне контроля, разработаны алгоритмы их расчета, на их основе проведен анализ распределения зондирующих полей, позволяющий оценить размеры зоны контроля и закономерности формирования выходных сигналов преобразователей при поперечно-сквозном зондировании потока. Разработан алгоритм исключения особых точек электрического поля при расчете его интегральных параметров – межэлектродных емкостей при использовании поперечно-сквозного зондирования потока.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абрамов Г.С. и др. Узел контроля качества нефти // Автоматиз., телемеханиз. и связь в нефт. пром-сти. – 1998. – № 9-10. – С. 10-11.
2. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
3. Байков Н.М., Позднышев Г.Н. Сбор и промысловая подготовка нефти, газа и воды. – М.: Недра, 1985.
4. Баринов Б.А. Контроль остаточного газосодержания и потерь нефти от испарения // Мир измерений. – 2006. – № 11. – С. 92.

MATHEMATICAL SIMULATION OF ELECTRIC FIELDS MULTIELECTRODE ELECTRO-CAPACITY CONVERTERS AT CROSS – THROUGH-FLOW SENSING

Yu.I. Steblev, S.V. Susarev, E.S. Vashurkina

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The paper consider computation of electric fields and parameters multielectrode electro-capacity converters moisture meters of oil in the cross – through-flow sensing. The analytical expressions for the potentials and the components of the electric field in the control zone are obtained.

Keywords: *multielectrode an electro-capacity transformer, optimization, transformer, sensor, oil, design.*

*Yury I. Steblev (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.
Sergey V. Susarev (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.
Ekaterina S. Vashurkina, Senior Lecture.*