УДК 681.518

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ ДВУХПОЛЮСНЫХ ЦЕПЕЙ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Н.Н. Хрисанов

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: samhnn@mail.ru

Рассматривается метод определения параметров многоэлементных двухполюсных цепей, основанный на интегрировании переходного процесса при синусоидальном воздействии.

Ключевые слова: *многоэлементный двухполюсник, метод Прони, интегральный метод, синусоидальное воздействие.*

В измерительной технике широко распространены интегральные методы определения параметров многоэлементных двухполюсных цепей благодаря фильтрующим свойствам операции интегрирования. В [1, 2, 3] предложены методы, основанные на применении ступенчатого или экспоненциального воздействия, однако они применимы не для всех типов двухполюсников. Значительно расширить область применения интегрального метода возможно при использовании синусоидального воздействия.

Теоретическое обоснование метода

Свободная составляющая для линейной двухполюсной электрической цепи в общем случае представляет собой сумму экспонент:

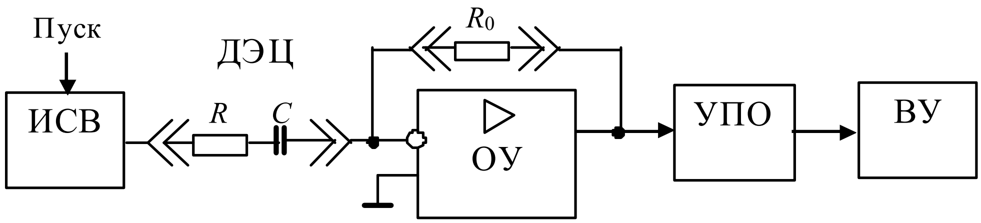
$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i \exp(p_i t),$$

где A_i – постоянные интегрирования (амплитуды экспонент), которые определяются из начальных условий; p_i – корни (показатели экспонент) характеристического уравнения. Причем амплитуды A_i и показатели p_i являются функциями элементов исследуемой двухполюсной электрической цепи. Как правило, определив амплитуды A_i и показатели p_i, можно определить и значения всех элементов электрической цепи.

Рассмотрим переходные процессы в простейшем двухполюснике – последовательной *RC*-цепи – при подаче на нее синусоидального воздействия. Пусть структурная схема измерительного канала имеет вид, представленный на рис. 1, где ИСВ – источник синусоидального воздействия; ДЭЦ – исследуемая двухполюсная электрическая цепь (в данном случае последовательная *RC*-цепь); ОУ – операционный усилитель; УПО – устройство предварительной обработки, включающее в себя аналоговый интегратор; ВУ – вычислительное устройство; R_0 – опорный элемент.

По сигналу «Пуск» источником синусоидального воздействия на входе исследуемого двухполюсника формируется напряжение вида

Николай Николаевич Хрисанов (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Вычислительная техника».



$$U_{\text{ВХ}}(t) = U_0 \sin \omega t\,. \tag{1}$$

Рис. 1. Схема для определения параметров последовательной *RC*-цепи

Запишем (1) в операторной форме:

$$U_{\text{ВХ}}(p) = U_0 \frac{1}{p^2 + \omega^2}\,. \tag{2}$$

Для напряжения на выходе операционного усилителя можно записать:

$$U_{\text{ВЫХ}}(p) = -U_{\text{ВХ}}(p)\frac{R_0}{R + \dfrac{1}{pC}} = -U_{\text{ВХ}}(p)\frac{pR_0}{R\left(p + \dfrac{1}{RC}\right)}\,. \tag{3}$$

Подставляя (2) в (3), получим:

$$U_{\text{ВЫХ}}(p) = -A\frac{p}{\left(p^2 + \omega^2\right)\left(p - p_1\right)},$$

где

$$A = U_0 \frac{R_0}{R},\ \ p_1 = -\frac{1}{RC}\,.$$

Переходя к оригиналу, получим для выходного напряжения:

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = -A\left(\omega \sin \omega\, t - p_1 \cos \omega\, t + p_1 e^{p_1 t}\right). \tag{4}$$

Запишем выражение для неопределенного интеграла от (4):

$$\int U_{\text{ВЫХ}}(t)dt = -A\left(-\cos \omega\, t - \frac{p_1}{\omega}\sin \omega\, t + e^{p_1 t}\right).$$

При $t = 0$ имеем

$$\int U_{\text{ВЫХ}}(t)dt\Big|_{t=0} = 0\,.$$

Тогда определенный интеграл от выходного напряжения в пределах от $t = 0$ до некоторого $t = t_{\text{Р}}$ будет равен

$$\int_0^{t_{\text{Р}}} U_{\text{ВЫХ}}(t)dt = -A\left(-\cos \omega t_{\text{Р}} - \frac{p_1}{\omega}\sin \omega t_{\text{Р}} + e^{p_1 t_{\text{Р}}}\right). \tag{5}$$

Учитывая, что $\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = -i\,\text{sh}(ix)$, получим:

$$\int_0^{t_{\text{Р}}} U_{\text{ВЫХ}}(t)dt = -A\left(-\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t_{\text{Р}}} + e^{-i\omega t_{\text{Р}}}\right) - \frac{p_1}{2i\omega}\left(e^{i\omega t_{\text{Р}}} - e^{-i\omega t_{\text{Р}}}\right) + e^{p_1 t_{\text{Р}}}\right)$$

Таким образом, интеграл от входного напряжения в интервале от $t=0$ до некоторого $t=t_{\text{Р}}$ также есть сумма экспонент и, следовательно, для определения показателей и амплитуд в (5) также можно применить метод Прони [4]. При этом в качестве исходных данных можно брать не равноотстоящие ординаты переходного процесса (как в методе Прони), а значения интегралов от $t=0$ до равноотстоящих ординат $t_{\text{Р}}$, $2t_{\text{Р}}$, $3t_{\text{Р}}$ … переходного процесса.

Из предыдущих рассуждений следует, что применение интегралов в методе Прони возможно, если выходное напряжение имеет вид

$$U_{\text{ВЫХ}} = A\sum_{i=0}^{n}\frac{p_i\exp(p_i t)}{Z_i}, \text{ где } Z_i=\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\left(p_i-p_k\right).$$

Выражение для неопределенного интеграла для выходного напряжения будет иметь вид

$$\int U_{\text{ВЫХ}}dt = A\sum_{i=0}^{n}\frac{\exp(p_i t)}{Z_i}.$$

Можно показать, что при $t=0$ и любом n значение этого выражения равно нулю. Отметим, что в этом случае также $\int U_{\text{ВЫХ}}(t)dt\Big|_{t=\infty}=0$ и, следовательно, $\int\limits_0^{\infty}U_{\text{ВЫХ}}(t)dt=0$.

При использовании синусоидального воздействия необходимо определить показатели двух экспонент, т. е. $n=2$. Следовательно, необходимо произвести интегрирование на $2n$ участках. Значения этих интегралов обозначим как $\widetilde{H}_j$, $j=\overline{1,4}$. Показатель одной экспоненты (соответствующей синусоидальному воздействию) известен, он может быть исключен из экспериментальных данных выполнением операции свертки:

$$H_j = b_0\widetilde{H}_{j-2}+b_1\widetilde{H}_{j-1}+b_2\widetilde{H}_j,\ j=\overline{1,2n},\ (\widetilde{H}_0=0),$$

где $b_0=1$, $b_1=2\cos\omega t_p$, $b_2=1$.

В итоге задача сводится к нахождению двух параметров – амплитуды A и показателя p_1 одной экспоненты.

Общая схема определения параметров экспонент и затем параметров двухполюсной сети выглядит следующим образом.

1. Производят интегрирование свободной составляющей переходного процесса на $2n$ участках: $\widetilde{H}_j=\int\limits_0^{jt_{\text{Р}}}U_{\text{ВЫХ}}dt$, $j=\overline{1,2n}$, где $t_{\text{Р}}$ – некоторый фиксированный интервал времени; n – порядок дифференциального уравнения, описывающего двухполюсную цепь.

2. Выполняют фильтрацию известных параметров, соответствующих входному воздействию из экспериментальных данных, выполнением операции свертки, в результате чего получают $2n$ значений интегралов:

$$H_j = b_0\widetilde{H}_{j-2}+b_1\widetilde{H}_{j-1}+b_2\widetilde{H}_j,\ j=\overline{1,2n},\ (\widetilde{H}_0=0), \tag{6}$$

где $b_0=1$, $b_1=2\cos\omega t_p$, $b_2=1$ [4]. Далее следуют стандартные шаги метода Прони (пункты 3-4).

3. Определяют n коэффициентов характеристического уравнения c_i, $i=\overline{0,n}$ ($c_n=1$) решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} c_0H_1 & +c_1H_2 & \dots & +c_{n-1}H_n & + & H_{n+1} & =0 \\ c_0H_2 & +c_1H_3 & \dots & +c_{n-1}H_{n+1} & + & H_{n+2} & =0 \\ & . & & . & . & & =0 \\ c_0H_n & +c_1H_{n+1} & \dots & +c_{n-1}H_{2n-1} & + & H_{2n} & =0 \end{cases}. \tag{7}$$

4. Находят n корней характеристического уравнения

$$c_0+\sum_{i=1}^{n-1}c_i\xi^i=0 \tag{8}$$

и определяют показатели экспонент. Для действительных корней находят соответствующее значение показателя p_j

$$p_j=\frac{\ln\left|\xi_j\right|}{t_{\text{Р}}}, \tag{9}$$

для комплексно-сопряженных ($\xi_{j,j+1}=x\pm jy$) – коэффициент затухания α_j и частоту синусоиды ω_j:

$$\alpha_j=\frac{\ln z}{t_{\text{Р}}}\ \omega_j=\frac{arctg(y/z)}{t_{\text{Р}}},\ \text{где}\ z=\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

5. Используя соотношения для исследуемой электрической цепи, определяют амплитуды экспонент и затем параметры двухполюсника решением системы уравнений

$$A_i=F_i^A(\mathbf{x}),\ p_i=F_i^p(\mathbf{x}),\ i=\overline{1,n},$$

где $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_m)$ – вектор параметров двухполюсника.

Важным моментом в использовании вышеописанной методики является выбор частоты ω входного синусоидального воздействия, а также оптимального значения интервала разбиения $t_{\text{Р}}$, в соответствии с которым производится интегрирование свободной составляющей переходного процесса. Очевидно, выбор частоты ω и интервала $t_{\text{Р}}$ необходимо производить таким образом, чтобы обеспечить минимальное значение погрешности определения составляющих вектора $\mathbf{x}$ (искомых параметров двухполюсной цепи).

Рассмотрим основные составляющие погрешности определения этих параметров при применении вышеописанной методики.

Пусть измерение ординат свободной составляющей переходного процесса производится с интервалом времени Δt с систематической погрешностью Δ, а среднеквадратичное отклонение случайной погрешности равно σ.

Предельная погрешность γ_{x_i} определения параметра x_i может быть вычислена по формуле

$$\gamma_{x_i}=\overline{\Delta}_{x_i}+t_\partial\overline{\sigma}_{x_i},$$

где $\overline{\Delta}_{x_i}$ – систематическая погрешность определения параметра x_i; $\overline{\sigma}_{x_i}$ – среднеквадратичное отклонение случайной погрешности определения x_i; t_∂ – доверительный интервал.

Поскольку искомые параметры являются функциями H_j, $j = \overline{1,2n}$, воспользуемся формулами для погрешности косвенных измерений:

$$\overline{\Delta}_{x_i} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial x_i}{\partial H_j} \Delta_j \, , \; \overline{\sigma}^2_{x_i} = \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial H_j} \right)^2 \sigma_j^2 + 2 \sum_{k<j} \frac{\partial x_i}{\partial H_k} \frac{\partial x_i}{\partial H_j} K_{kj} \, , \tag{10}$$

где Δ_j – систематическая погрешность определения интеграла H_j; σ_j – среднеквадратичное отклонение случайной погрешности определения интеграла H_j; K_{kj} – корреляционный момент величин H_k и H_j.

Для Δ_j можно записать:

$$\Delta_j = \Delta\left[T - (j-1)t_{\mathrm{P}}\right],$$

где T – интервал интегрирования при определении H_1.

Среднеквадратичное отклонение σ_j случайной погрешности определения H_j при использовании методов дискретного интегрирования (например метода трапеций) и при условии, что корреляционная функция погрешности спадает до нуля за время порядка интервала между замерами, равно

$$\sigma_j = \sqrt{n_j} \Delta t \sigma \, ,$$

где n_j – количество отсчетов, взятых на интервале T_j (интервале интегрирования переходной характеристики при определении H_j).

Учитывая, что $n_j = \dfrac{T - (j-1)t_{\mathrm{P}}}{\Delta t}$, получим

$$\sigma_j = \sqrt{\left[T - (j-1)t_{\mathrm{P}}\right]} \Delta t \sigma \, .$$

Можно показать, что корреляционный момент K_{kj} величин H_k и H_j равен

$$K_{kj} = \sigma^2 \left[H_j\right].$$

С учетом этого среднеквадратичное отклонение случайной погрешности определения x_i запишется в виде

$$\overline{\sigma}^2_{x_i} = \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial H_j} \right)^2 \sigma_j^2 + 2 \sum_{k<j} \frac{\partial x_i}{\partial H_k} \frac{\partial x_i}{\partial H_j} \sigma_j^2 \, .$$

Поскольку значения интегралов H_j и погрешности их определения зависят от значений частоты ω и интервала t_{P}, выбор ω и t_{P} целесообразно производить таким образом, чтобы обеспечить минимальное значение соответствующей погрешности:

$$\gamma^*_{x_i} = \min_{\omega, t_{\mathrm{P}}} \left(\overline{\Delta}_{x_i} + t_\partial \overline{\sigma}_{x_i} \right).$$

Определение параметров двухэлементных двухполюсников

Для определения параметров двухэлементного двухполюсника при синусоидальном воздействии достаточно произвести интегрирование свободной составляющей переходного процесса на трех участках. В результате получим три значения $\widetilde{H}_j, j=\overline{1,3}$ (значение $\widetilde{H}_0$ принимаем равным нулю). Исключаем из исходных данных значение известной экспоненты применением операции фильтрации (6). Получим два значения интегралов:

$$H_1 = b_1\widetilde{H}_1 + b_2\widetilde{H}_2 \, , \; H_2 = b_0\widetilde{H}_1 + b_1\widetilde{H}_2 + b_2\widetilde{H}_3 \, .$$

Для последовательной RC-цепи (см. рис. 1) система уравнений (7) примет вид

$$c_0 H_1 + H_2 = 0 \, ,$$

откуда находим

$$c_0 = -\frac{H_2}{H_1} \, .$$

Характеристическое уравнение (8) в данном случае имеет единственный действительный корень $\xi = -c_0$.

По формуле (9) находим

$$p_1 = \frac{\ln\left(H_2/H_1\right)}{t_{\text{Р}}}, k = \overline{1,2} \, .$$

Учитывая (5), запишем выражение для H_k, $k=\overline{1,2}$:

$$H_k = A\left(\cos k\omega t_{\text{Р}} + \frac{p_1}{\omega}\sin k\omega t_{\text{Р}} - e^{kp_1 t_{\text{Р}}}\right).$$

Используя одно из значений интеграла H_1 или H_2, находим значение амплитуды A:

$$A = \frac{H_k}{\cos k\omega\, t_{\text{Р}} + \dfrac{p_1}{\omega}\sin k\omega\, t_{\text{Р}} - e^{kp_1 t_{\text{Р}}}} \, .$$

Система уравнений (15) в данном случае примет вид

$$\begin{cases} A = U_0 \dfrac{R_0}{R} \\ p_1 = -\dfrac{1}{RC} \end{cases} .$$

Решая эту систему уравнений относительно R и C, получим:

$$R = U_0 \frac{R_0}{A}, \; C = -\frac{1}{p_1 R} \, .$$

Оценим погрешность определения параметров элементов двухэлементного двухполюсника. С целью упрощения выражений для частных производных в формулах (10) запишем их в следующем виде.

$$\overline{\Delta}_{p_1} = \frac{\partial p_1}{\partial \widetilde{H}_1}\Delta_1 + \frac{\partial p_1}{\partial \widetilde{H}_2}\Delta_2 + \frac{\partial p_1}{\partial \widetilde{H}_3}\Delta_3 \, , \; \overline{\Delta}_A = \frac{\partial A}{\partial H_1}\Delta_1 + \frac{\partial A}{\partial p_1}\overline{\Delta}_{p_1} \, , \; \overline{\Delta}_R = \frac{\partial R}{\partial A}\overline{\Delta}_A \, ,$$

$$\overline{\Delta}_C = \frac{\partial C}{\partial p_1}\overline{\Delta}_{p_1} + \frac{\partial C}{\partial R}\overline{\Delta}_R \, ,$$

где

$$\frac{\partial p_1}{\partial \widetilde{H}_1} = \frac{H_2 b_2 - H_2 b_1^{\,2} - H_3 b_2 b_3}{t\left(H_1 + H_2 b_1 + H_3 b_2\right)\left(H_1 b_1 + H_2 b_2\right)},$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \widetilde{H}_2} = \frac{H_1 b_1^{\,2} - H_1 b_2 - H_3 b_2^{\,2}}{t_P\left(H_1 + H_2 b_1 + H_3 b_2\right)\left(H_1 b_1 + H_2 b_2\right)}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial \widetilde{H}_3} = \frac{b_2}{t_P\left(H_1 + H_2 b_1 + H_3 b_2\right)},$$

$$\frac{\partial\, \mathrm{A}}{\partial \widetilde{H}_3} = \frac{1}{t_P \cos(3\omega\, t) - e^{3 t_P p_1} + \dfrac{p_1 \sin(3\omega\, t_P)}{\omega}},$$

$$\frac{\partial\, \mathrm{A}}{\partial p_1} = \frac{\widetilde{H}_1\left(\dfrac{\sin(3\omega\, t_P)}{\omega} - 3 t_P e^{3 t_P p_1}\right)}{\left(t_P \cos(3\omega\, t) - e^{3 t_P p_1} + \dfrac{p_1 \sin(3\omega\, t_P)}{\omega}\right)^2},$$

$$\frac{\partial R}{\partial A} = \frac{U_0 R_0}{A^2}, \quad \frac{\partial C}{\partial R} = \frac{1}{p_1 R^2} \quad \frac{\partial C}{\partial p_1} = \frac{1}{p_1^{\,2} A}.$$

На погрешность определения параметров двухполюсника большое влияние оказывают выбор частоты входного синусоидального воздействия и интервал разбиения t_{P}. На рис. 2 *а*, *б* приведены зависимости систематической (*а*) и случайной погрешности (*б*) определения параметров от отношения периода синусоидального входного воздействия $T = {}^{1}\!/_{f}$ к постоянной времени исследуемого двухполюсника. Из рис. 2 следует, что частоту входного воздействия следует выбирать исходя из соотношения $1 < {}^{1}\!/_{f\tau} < 1{,}5$.

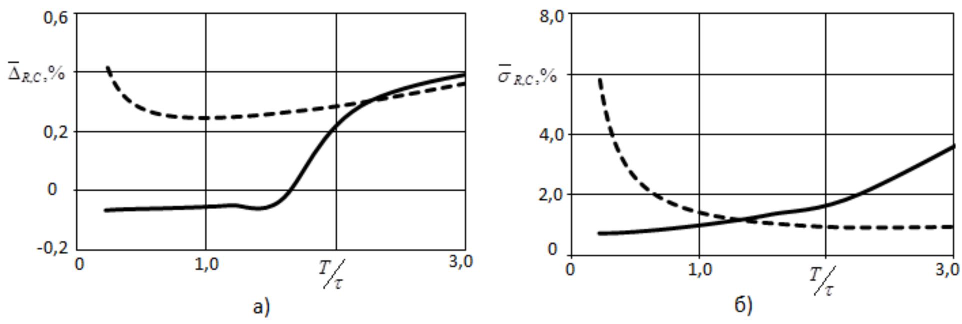


Рис. 2. Зависимость систематической (*а*) и случайной погрешности (*б*) определения параметров от отношения периода входного воздействия к постоянной времени исследуемого двухполюсника (сплошная линия – погрешность определения *R*, пунктирная – *C*)

На рис. 3 *а*, *б* приведены зависимости систематической (*а*) и случайной погрешности (*б*) определения параметров от отношения периода синусоидального входного воздействия $T = {}^{1}\!/_{f}$ к интервалу разбиения t_{P}.

Из рис. 3 следует, что интервал разбиения при интегрировании выходного сигнала должен быть равен $t_{\text{P}} = 0{,}5T$.

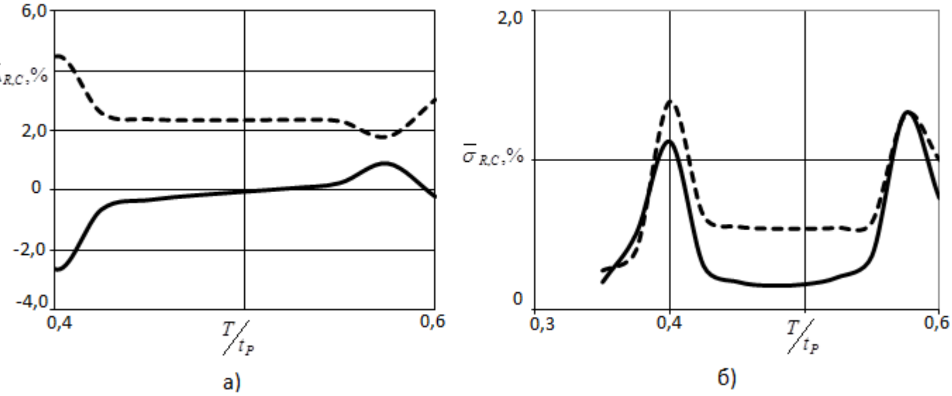


Рис. 3. Зависимость систематической (*а*) и случайной погрешности (*б*) определения параметров от отношения периода входного воздействия к интервалу разбиения (сплошная линия – погрешность определения *R*, пунктирная – *C*)

Рассмотренный способ определения параметров двухполюсника может быть реализован с помощью устройства, описанного в [5].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хрисанов Н.Н., Фролагин Д.Б.* Определение параметров двухполюсных цепей по интегральным характеристикам переходного процесса // Тезисы Всероссийской научн.-техн. конф. «Методы и средства измерения в системах контроля и управления». – Пенза, 11-12 апреля 2001 г. – С. 125-127.
2. Пат. 2310872 России МКИ3 G01R 27/02. Способ определения параметров многоэлементных двухполюсных цепей / Н.Н. Хрисанов (Россия); № 2005128367/28; заявлено 12.09.2005;. Опубл. 10.05.2009. Бюл. № 13.
3. Пат. 2210081 России МКИ3 G01R 27/02. Способ определения параметров многоэлементных двухполюсных цепей / Н.Н. Хрисанов, Д.Б. Фролагин (Россия); № 2001133361/09; заявлено 07.12.2001; Опубл. 27.03.2005. Бюл. № 09.
4. *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
5. Пат. 2212677 России МКИ3 G01R 27/02. Устройство для определения параметров многоэлементных двухполюсных цепей / Н.Н. Хрисанов, Д.Б. Фролагин (Россия); № /09; заявлено 26.03.2001; Опубл. 10.12.2004. Бюл. № 34.

Статья поступила в редакцию 23 ноября 2012 г.

THE INTEGRAL METHOD OF DETERMINING THE PARAMETERS OF MULTIELEMENT TWO POLE CIRCUIT SINUSOIDAL EFFECTS

N.N. Hrisanov

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The method of determining the multielement bipolar circuits parameters is considered based on the integration of the transient sinusoidal exposure.

Keywords:*multi-element two-terminal, Prony's method, the integral method, the sinusoidal effect .*

Nikolay N. Hrisanov (Ph. D. (Techn.)), Associate Professor