УДК 534.11

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ БАЛКИ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОДПРУЖИНЕННОЙ ОПОРОЙ

В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов, И.В. Корпен

Сызранский филиал Самарского государственного технического университета
446001, Самарская обл., г. Сызрань, ул. Советская, 45
E-mails: anisimov170159@mail.ru, vladlitvinov@rambler.ru

Сформулирована постановка задачи о колебаниях балки с движущейся подпружиненной опорой, несущей присоединенную массу. При неабсолютно жестком закреплении опоры через движущуюся границу происходит энергетический обмен. В связи с этим возникает сложность в записи граничных условий. Для постановки задачи использован вариационный принцип Гамильтона. При этом учтены вязкоупругие свойства материала балки. Поставленная задача включает в себя дифференциальное уравнение колебаний, начальные условия для изогнутой оси балки и для присоединенной массы, граничные условия. Условия на движущейся границе записаны в виде соотношений между значениями функции и ее производных слева и справа от границы.

Ключевые слова: *колебания балки с движущейся подпружиненной опорой, граничные условия, вариационные принципы.*

Задачи о колебаниях балки с движущейся опорой относятся к широкому классу задач, связанных с колебаниями объектов с движущимися границами [1-5]. Во всех рассмотренных ранее случаях жесткое закрепление движущейся опоры исключало обмен энергией через нее. При наличии энергетического обмена возрастает сложность в записи условий на движущейся границе. В данной работе для постановки задачи предлагается использовать вариационный принцип Гамильтона.

Из всех возможных законов движения в действительности реализуется такой, для которого действие $\int_{t_0}^{t_1}(T-U)dt,$ где T и U – кинетическая и потенциальная энергия системы, принимает стационарное значение [6].

Рассмотрим балку, изображенную на рис. 1, где введены следующие обозначения: l_0 – длина балки; $u(x,t)$ – поперечное смещение точки с координатой x балки в момент времени t; E – модуль упругости материала балки; I – осевой момент инерции сечения балки; ρ – линейная плотность массы балки; $l(t)$ – закон движения границы; m – масса, присоединенная к движущейся опоре; k_1 – жесткость опоры по отношению к поперечному смещению; k_2 – жесткость опоры по отношению к угловому смещению; λ – коэффициент, учитывающий вязкоупругость.

При учете вязкоупругости с помощью модели Фойхта имеет место следующее соотношение:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \lambda\dot{\varepsilon}(t)\,, \qquad (1)$$

Валерий Николаевич Анисимов (к.ф.-м.н., доц.), доцент кафедры «Общетеоретические дисциплины».

Владислав Львович Литвинов, доцент кафедры «Общетеоретические дисциплины».

Инна Владимировна Корпен (к.п.н.), доцент кафедры «Общетеоретические дисциплины».

где $\sigma(t)$ – напряжения; $\varepsilon(t)$ – деформации.

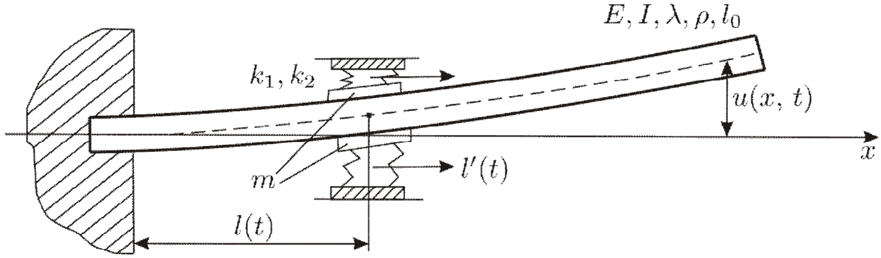

Рис. 1. Кинематическая схема балки

Для учета энергетического обмена через движущуюся границу разобьем область колебаний в координатах x, t на две части W_1, W_2 (рис. 2). Область W_1 соответствует части балки справа от движущейся границы, область W_2 – слева. Через γ_1 и γ_2 обозначены замкнутые контуры, окружающие области W_1, W_2. Через W обозначена объединенная область W_1, W_2.

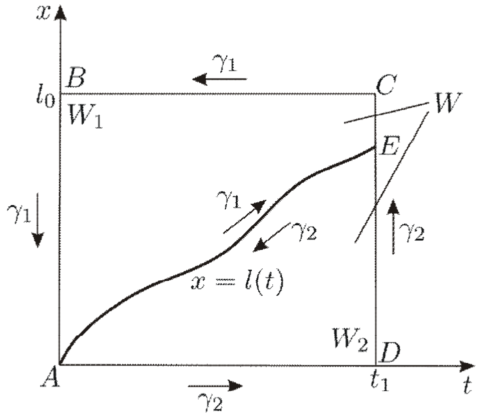

Рис. 2. Области энергетического обмена

Для использования вариационного принципа Гамильтона необходимо получить интеграл действия от кинетической и потенциальной энергий объекта. Найдем составляющие интеграла действия, а также их вариации. Выражение для интеграла действия от кинетической энергии балки имеет вид

$$J_{T_1} = \frac{1}{2}\rho\iint\limits_W u_t^2 dW.$$

Здесь и далее, где это возможно, вместо $u(x,t)$ будем использовать просто u.

Найдем вариацию J_{T_1} :

$$\delta J_{T_1} = \rho\iint\limits_W u_t \delta u_t dW. \tag{2}$$

Представим подынтегральное выражение в виде

$$u_t \delta u_t = \frac{\partial}{\partial t}(u_t \delta u) - u_{tt}\delta u. \tag{3}$$

С помощью формулы Грина

$$\iint\limits_W \left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dW = \oint\limits_\gamma (Pdx + Qdt)$$

и с учетом (3) выражение (2) можно записать следующим образом:

$$\delta J_{T_1} = \rho \left(-\iint\limits_W u_{tt} \delta u dW + \oint\limits_{\gamma_1} u_t \delta u dx + \oint\limits_{\gamma_2} u_t \delta u dx \right). \tag{4}$$

Интеграл действия для кинетической энергии присоединенной массы m равен

$$J_{T_2} = \frac{1}{2} m \int\limits_0^{t_1} \left(\frac{du\left(l(t), t\right)}{dt} \right)^2 dt. \tag{5}$$

Вариация выражения (5) после интегрирования по частям примет следующий вид:

$$\delta J_{T_2} = m \left(\frac{du\left(l(t), t\right)}{dt} \delta u \Big|_{x=l(t)} \right) \Bigg|_0^{t_1} - \int\limits_0^{t_1} \frac{d^2 u\left(l(t), t\right)}{dt^2} \delta u \Big|_{x=l(t)} dt \ . \tag{6}$$

Полную производную выражения (5) можно представить так:

$$\frac{d}{dt} \left(u(l(t), t) \right) = u_x (l(t), t) l'(t) + u_t (l(t), t).$$

С учетом выражения (1) изгибающий момент в сечении балки записывается следующим образом:

$$M = I(E u_{xx} + \lambda u_{xxt}).$$

Интеграл действия потенциальной энергии балки определяется выражением

$$J_{U_1} = \frac{1}{2} EI \iint\limits_W u_{xx}^2 dW.$$

Найдем вариацию

$$\delta J_{U_1} = EI \iint\limits_W u_{xx} \delta u_{xx} dW. \tag{7}$$

Подынтегральное выражение в (7) можно привести к следующему виду:

$$u_{xx} \delta u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (u_{xx} \delta u_x) - \frac{\partial}{\partial x} (u_{xxx} \delta u) + u_{xxxx} \delta u. \tag{8}$$

С помощью формулы Грина и с учетом (8) для вариации (7) получим:

$$\delta J_{U_1} = EI \left(\iint\limits_W u_{xxxx} \delta u dW - \oint\limits_{\gamma_1} u_{xx} \delta u_x dt - \oint\limits_{\gamma_2} u_{xx} \delta u_x dt + \oint\limits_{\gamma_1} u_{xxx} \delta u dt + \oint\limits_{\gamma_2} u_{xxx} \delta u dt \right). \tag{9}$$

Вариация интеграла действия внутренних вязкоупругих сил имеет вид

$$\delta J_{U_2} = \lambda I \iint\limits_W u_{xxt} \delta u_{xx} dW.$$

Делая аналогичные преобразования, получим:

$$\delta J_{U_2} = \lambda I \left(\iint\limits_W u_{xxxxt} \delta u dW - \oint\limits_{\gamma_1} u_{xxt} \delta u_x dt - \oint\limits_{\gamma_2} u_{xxt} \delta u_x dt + \oint\limits_{\gamma_1} u_{xxxt} \delta u dt + \oint\limits_{\gamma_2} u_{xxxt} \delta u dt \right). \tag{10}$$

Потенциальная энергия от деформации опоры имеет вид

$$U_3 = \frac{1}{2} k_1 u^2 (l(t),t) + \frac{1}{2} k_2 u_x^2 (l(t),t).$$

Интеграл действия потенциальной энергии от деформации опоры определяется выражением

$$J_{U_3} = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \left(k_1 u^2 (l(t),t) + k_2 u_x^2 (l(t),t) \right) dt.$$

Вариация интеграла действия потенциальной энергии опоры имеет следующий вид:

$$\delta J_{U_3} = \int_0^{t_1} \left(k_1 u(l(t),t) \delta u\Big|_{x=l(t)} + k_2 u_x (l(t),t) \delta u_x \Big|_{x=l(t)} \right) dt. \tag{11}$$

Применяя вариационный принцип Гамильтона, получим следующее уравнение:

$$\delta J_{T_1} + \delta J_{T_2} - \delta J_{U_1} - \delta J_{U_2} - \delta J_{U_3} = 0. \tag{12}$$

Перед получением начальных и граничных условий запишем естественные соотношения между значениями функции u и ее производными слева и справа от движущейся границы:

$$u(l(t)-0,t) = u(l(t)+0,t); \tag{13}$$

$$u_t(l(t)-0,t) = u_t(l(t)+0,t); \tag{14}$$

$$u_x(l(t)-0,t) = u_x(l(t)+0,t). \tag{15}$$

Распишем уравнение (12) с учетом соотношений (13), (14), (15):

$$-\iint_W (\rho u_{tt} + EIu_{xxxx} + \lambda I u_{xxxxt}) \delta u dW + \rho \int_0^{l_0} \left(u_t(x,t) \delta u \right) \Big|_0^{t_1} dx +$$

$$+m \left(\frac{du(l(t),t)}{dt} \delta u\Big|_{x=l(t)} \right) \Big|_0^{t_1} + \int_0^{t_1} (EIu_{xx}(0,t) + \lambda I u_{xxt}(0,t)) \delta u_x \Big|_{x=0} dt -$$

$$-\int_0^{t_1} (EIu_{xxx}(0,t) + \lambda I u_{xxxt}(0,t)) \delta u \Big|_{x=0} dt - \int_0^{t_1} (EIu_{xx}(l_0,t) + \lambda I u_{xxt}(l_0,t)) \delta u_x \Big|_{x=l_0} dt +$$

$$+\int_0^{t_1} (EIu_{xxx}(l_0,t) + \lambda I u_{xxxt}(l_0,t)) \delta u \Big|_{x=l_0} dt - \int_0^{t_1} (EI(u_{xxx}(l(t)-0,t) - u_{xxx}(l(t)+0,t)) +$$

$$+\lambda I(u_{xxxt}(l(t)-0,t) - u_{xxxt}(l(t)+0,t)) + k_1 u(l(t),t) + m \frac{d^2 u(l(t),t)}{dt^2}) \delta u \Big|_{x=l(t)} dt +$$

$$+\int_0^{t_1} (EI(u_{xx}(l(t)-0,t) - u_{xx}(l(t)+0,t)) + \lambda I(u_{xxt}(l(t)-0,t) - u_{xxt}(l(t)+0,t)) -$$

$$-k_2 u_x(l(t),t)) \delta u_x \Big|_{x=l(t)} dt = 0. \tag{16}$$

Выражение (16) должно быть тождественно равно нулю. Это возможно, если коэффициенты перед вариациями $\delta u,\ \delta u\big|_{t=t_1}, \delta u\big|_{t=0}, \delta u\big|_{\substack{x=l(t_1)\\ t=t_1}}, \delta u\big|_{\substack{x=l(0)\\ t=0}}, \delta u_x\big|_{x=0}$,

$\delta u\big|_{x=0}, \delta u_x\big|_{x=l_0}, \delta u\big|_{x=l_0}, \delta u\Big|_{x=l(t)}, \delta u_x\big|_{x=l(t)}$ равны нулю. Выполнение равенства (16) также возможно, если функции $u(x,t_1), u(x,0), u(l(t_1),t_1), u_x(0,t), u(0,t), u_x(l_0,t)$, $u(l_0,t), u(l(t),t), u_x(l(t),t)$ заданы. В этом случае их вариации равны нулю.

Приравняв нулю коэффициенты перед δu, получим дифференциальное уравнение колебаний для областей W_1 и W_2 :

$$\rho u_{tt} + EIu_{xxxx} + \lambda I u_{xxxxt} = 0. \tag{17}$$

Выражения $u_t(x,t_1)\delta u\big|_{t=t_1}$ и $u_t(x,0)\delta u\big|_{t=0}$ могут быть равны нулю, если $\delta u\big|_{t=t_1} = \delta u\big|_{t=0} = 0$. При этом функции $u(x,0), u(x,t_1)$ должны быть заданы.

Начальные условия краевых задач гиперболического типа обычно записываются в следующем виде:

$$u(x,0) = \varphi_1(x);\ u_t(x,0) = \varphi_2(x), \tag{18}$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – заданные функции. При этом вариация $\delta u\big|_{t=0} = 0$. Если решение краевой задачи существует и единственно, то значение $u(x,t_1)$ при любых t_1 однозначно определяется дифференциальным уравнением, начальными и граничными условиями. При этом вариация $\delta u\big|_{t=t_1} = 0$.

Равенство нулю безинтегральных членов (16) обеспечивается заданием начальных условий для сосредоточенной массы:

$$u(l(0),0) = a_1;\ u_t(l(0),0) = a_2, \tag{19}$$

где a_1, a_2 – начальное смещение и начальная скорость сосредоточенной массы m.

Равенство нулю выражений с $\delta u\big|_{x=l_0}$, $\delta u_x\big|_{x=l_0}$ может быть обеспечено следующими видами условий на границе АД:

$$\begin{cases} u(l_0,t) = \varphi_3(t), \\ u_x(l_0,t) = \varphi_4(t); \end{cases} \qquad \begin{cases} u(l_0,t) = \varphi_3(t), \\ EIu_{xx}(l_0,t) + \lambda I u_{xxt}(l_0,t) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x(l_0,t) = \varphi_4(t), \\ EIu_{xxx}(l_0,t) + \lambda I u_{xxxt}(l_0,t) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} EIu_{xx}(l_0,t) + \lambda I u_{xxt}(l_0,t) = 0, \\ EIu_{xxx}(l_0,t) + \lambda I u_{xxxt}(l_0,t) = 0, \end{cases} \tag{20}$$

где $\varphi_3(t), \varphi_4(t)$ – заданные функции.

Для балки, изображенной на рис. 1, $u(l_0,t), u_x(l_0,t)$ не заданы.

Граничные условия при $x = l_0$ задаются и имеют вид (20). При постановке краевых задач с использованием вариационных принципов такие условия называются естественными [6]. На левом конце балки $(x = 0)$ $u(0,t) = u_x(0,t) = 0$.

При этом интегралы тождества (16), содержащие $\delta u\big|_{x=l_0}$, $\delta u_x\big|_{x=l_0}$, равны нулю.

На движущейся границе $u(l(t),t), u_x(l(t),t)$ не заданы. Естественные условия на движущейся границе имеют следующий вид:

$$EI\left(u_{xx}(l(t)+0,t)-u_{xx}(l(t)-0,t)\right)+$$
$$+\lambda I\left(u_{xxt}(l(t)+0,t)-u_{xxt}(l(t)-0,t)\right)+k_2u_x(l(t),t)=0; \tag{21}$$

$$EI\left(u_{xxx}(l(t)+0,t)-u_{xxx}(l(t)-0,t)\right)-m\frac{d^2u(l(t),t)}{dt^2}+$$
$$+\lambda I\left(u_{xxxt}(l(t)+0,t)-u_{xxxt}(l(t)-0,t)\right)-k_1u(l(t),t)=0. \tag{22}$$

Таким образом, для балки, изображенной на рис. 1, получено дифференциальное уравнение (17), начальные условия (18), (19) и граничные условия (20) – (22).

Отметим, что методов аналитического решения поставленной задачи в настоящее время не существует, поэтому данную задачу, по всей видимости, можно решать только численными методами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Самарин Ю.П.* О волновых явлениях в областях с подвижными границами // Волжский математический сборник. – Куйбышев, 1967. – Вып. 5. – С. 337-340.
2. *Весницкий А.И., Потапов А.И.* О некоторых общих свойствах волновых процессов в одномерных механических системах переменной длины // Прикладная механика. – 1975. – № 4. – С. 98-102.
3. *Горошко О.А., Савин Г.Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. – Киев: Наук. думка, 1971. – 270 с.
4. *Лежнева А.А.* Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. – № 1. – С. 159-161.
5. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: Монография. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2009. – 131 с.: ил.
6. *Мышкис А.Д.* Математика для технических вузов: спец. курсы. 2-е изд. – СПб.: Лань, 2002. – 640 с.

Статья поступила в редакцию 26 ноября 2012 г.

THE FORMULATION OF THE PROBLEM OF THE BEAM FLUCTUATIONS WITH MOVING SPRING-LOADED SUPPORT

V.N. Anisimov, V.L. Litvinov, I.V. Korpen

Syzran Branch of Samara State Technical University
45, Sovetskaya str., Syzran, Samara region, 446001

The problem of beam fluctuations with moving spring-loaded support which has got joined mass is received. When the support is not absolutely fastened within the moving border energy exchange occurs. This leads to complexity in record boundary conditions. To formulate the task the variational principle of Hamilton is used. The visco-elastic properties of material of the beam are taken into account. The task includes differential equation, initial conditions for a curved axis of the beam and for joined mass, boundary conditions. Note that the conditions on the moving border are written as ratios between function and its derivatives on the left and right sides of the border.

Keywords: *the beam fluctuations with moving spring-loaded support, boundary conditions, variational principles.*

Valeriy N. Anisimov (Ph. D. (Phis. & Math.)), Associate Professor.
Vladislav L. Litvinov, Teacher, Dept. of general – theoretical disciplines.
Inna V. Korpen (Ph. D.), Associate Professor.