

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ ТОЧЕК КОНТРОЛЯ ПРИ НЕПОЛНОМ ИЗМЕРЕНИИ СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В ПРОЦЕССЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ*

А.Н. Дилигенская, Э.Я. Рапопорт

ГОУ ВПО «Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Рассматривается задача оптимального расположения точек измерения функции состояния нестационарного процесса теплопроводности, минимизирующего погрешность ее восстановления. Проблема сводится к минимизации ошибки равномерного приближения к нулю разности функций Грина идентифицируемого и модельного представления решений исследуемой краевой задачи.

Ключевые слова: *Функции Грина, неполное измерение состояния, равномерное приближение, альтернативный метод*

При синтезе замкнутых систем управления объектами с распределенными параметрами (ОРП) или при решении задачи идентификации неконтролируемого пространственно-временного внешнего воздействия (например, функции внутреннего тепловыделения при индукционном нагреве) получение максимально возможной информации о функции состояния объекта в каждый момент времени в любой точке пространственной области определения объекта является сложной актуальной задачей. Ее сложность заключается в том, что получить полную информацию принципиально невозможно, т.к. практическое измерение бесконечного числа управляемых величин может быть осуществлено только с помощью конечного числа измерительных устройств. В этом случае речь идет только о неполном измерении состояния объекта [1]. В связи с этим, задача оптимального расположения измерительных устройств, минимизирующего погрешность восстановления функции состояния объекта, имеет важное значение.

Рассматривается процесс нестационарной теплопроводности с внутренним тепловыделением $F(x, \varphi)$, описываемый линейным одномерным неоднородным уравнением Фурье с краевыми условиями третьего рода, представленный в относительных единицах изменения пространственной координаты $x \in [0, 1]$ и безразмерного времени $\varphi \in [0, \varphi^0]$, которому соответствует бесконечная система уравнений первого порядка относительно временных мод $\bar{\theta}_n(\varphi)$ управляемой функции состояния [2]:

$$\frac{d\bar{\theta}_n}{d\varphi} = -\mu_n^2 \bar{\theta}_n + \bar{F}_n, \quad \bar{\theta}_n(0) = \bar{\theta}_0(\mu_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-08-00277).

Эдгар Яковлевич Рапопорт (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Автоматика и управление в технических системах».

Анна Николаевна Дилигенская (к.т.н.), доцент кафедры «Автоматика и управление в технических системах».

где μ_n - известные собственные числа модели объекта, $\bar{\theta}_n = \bar{\theta}(\mu_n, \varphi)$; $\bar{F}_n = \bar{F}(\mu_n, \varphi)$; $\bar{\theta}_n(0) = \bar{\theta}(\mu_n, 0)$ - изображения по методу конечных интегральных преобразований температурного поля $\theta(x, \varphi)$, функции внутреннего тепловыделения $F(x, \varphi)$ и начального температурного распределения $\theta_0(x)$.

Предполагается, что в течение всего процесса нагрева нестационарное температурное поле $\theta(x, \varphi)$ внутри пространственной области D в пределах объема нагреваемого тела контролируется с помощью конечного числа N наблюдающих устройств. Измерения проводятся в некоторой пространственной области $\bar{D} \subset D$, не совпадающей с областью определения координаты x . В результате эксперимента имеются температурные зависимости $\theta_i^*(\varphi) = \theta(x_i^*, \varphi)$, полученные в некоторых фиксированных точках $x_i^* \in [0, 1]$, $i = \overline{1, N}$. При этом для обеспечения удовлетворительной точности число N должно быть достаточно большим.

Требуется в конце интервала идентификации $\varphi = \varphi^0$ при заданном числе N наблюдающих устройств определить координаты их размещения $x^* = (x_i^*)$, $i = \overline{1, N}$ таким образом, чтобы оцениваемое в равномерной метрике отклонение аппроксимирующей зависимости $\tilde{\theta}(x, x^*, \varphi)$ управляемой величины $\theta(x, \varphi)$, полученное по результатам измерений $\theta^*(\varphi) = (\theta(x_i^*, \varphi))$, от ненаблюдаемого точного значения $\theta^0(x, \varphi)$ по всей области изменения $x \in [0, 1]$ было минимально возможным

$$I(x^*) = \max_{x \in [0, 1]} |\theta^0(x, \varphi^0) - \tilde{\theta}(x, x^*, \varphi^0)| \rightarrow \min_{x^*}. \quad (2)$$

Задача аппроксимации пространственно-распределенного температурного поля может быть решена на основе модального представления функции состояния ОРП в форме конечного числа N первых членов бесконечного ряда

$$\theta(x, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi) \phi_n(\mu_n, x) \quad (3)$$

разложения $\theta(x, \varphi)$ по ортогональной системе собственных функций $\{\phi_n(\mu_n, x)\} = \{\cos(\mu_n x)\}$ [2, 3] с временными модами $\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)$ в роли его коэффициентов.

Число учитываемых мод в (3) не должно превышать количество точек контроля N . Значения временных мод $\bar{\theta}(\varphi) = \{\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)\}$ определяются на основе экспериментальных зависимостей $\theta_i^*(\varphi)$

$$\theta_i^*(\varphi) \approx \sum_{n=1}^N \bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi) \phi_n(\mu_n, x_i^*), \quad i = \overline{1, N}, \quad (4)$$

как решение системы уравнений (4), в векторной форме записи имеющей вид

$$\bar{\theta}(\varphi) = \Phi(\mu, x^*)^{-1} \times \theta^*(\varphi). \quad (5)$$

Квадратная матрица $\Phi(\mu, x^*) = \|\phi_n(\mu_n, x_i^*)\|$ содержит значения $n = \overline{1, N}$ собст-

венных функций объекта для точек контроля x_i^* , $i = \overline{1, N}$. В итоге получается система для определения значений $\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)$

$$\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi) = \sum_{i=1}^N K_{ni} \theta_i^*(\varphi), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

где коэффициенты K_{ni} в (5) определяются по формулам Крамера для матрицы $\Phi(\mu, x^*)$ [1].

На основании (3) и (6) аппроксимирующее выражение $\tilde{\theta}(x, x^*, \varphi)$, зависящее от координат точек измерения x_i^* , примет вид

$$\tilde{\theta}(x, x^*, \varphi) \approx \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N K_{ni} \theta(x_i^*, \varphi) \phi_n(\mu_n, x). \quad (7)$$

Особенность постановки задачи (2) состоит в том, что точное значение функции состояния $\theta^0(x, \varphi)$ при произвольном характере функции внутреннего тепловыделения $F(x, \varphi)$ принципиально неизвестно.

В таком случае воспользуемся основным соотношением, связывающим выход объекта $\theta(x, \varphi)$ с внешним воздействием через основную фундаментальную характеристику ОРП, отражающую внутренние свойства объекта и не зависящую от характера входных воздействий – функцию Грина $G(x, \xi, \varphi - \tau)$ [2,4]. Точное решение $\theta^0(x, \varphi)$ при этом имеет вид

$$\theta^0(x, \varphi) = \int_0^{\varphi} \int_0^1 G(x, \xi, \varphi - \tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (8)$$

где ξ и τ - переменные интегрирования по пространственной координате и времени, а входящие в (7) зависимости для измеряемых температур можно представить в виде

$$\theta(x_i^*, \varphi) = \int_0^{\varphi} \int_0^1 G(x_i^*, \xi, \varphi - \tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (9)$$

В этом случае задача (2) на основании (6) и (9) формулируется как специальная задача математического программирования (СЗМП)

$$I(x^*) = \max_{x \in [0,1]} \int_0^{\varphi} \int_0^1 \left(G(x, \xi, \varphi^0 - \tau) - \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N K_{ni} G(x_i^*, \xi, \varphi^0 - \tau) \phi_n(\mu_n, x) \right) \times \\ \times F(\xi, \tau) d\xi d\tau \Big| \rightarrow \min_x, \quad (10)$$

рассматриваемая на замкнутом компактном множестве параметров $x^* = (x_i^*)$, обеспечивающих минимальное значение критерия (10). Минимизация $I(x^*)$ при любом пространственно-временном воздействии $F(x, \varphi)$ достигается путем перехода к решению задачи

$$I_1(x^*) = \max_{x \in [0,1]} \left| \int_0^{\varphi^0} \int_0^1 \left(G(x, \xi, \varphi^0 - \tau) - \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N K_{ni} G(x_i^*, \xi, \varphi^0 - \tau) \phi_n(\mu_n, x) \right) d\xi d\tau \right| \rightarrow \min_{x^*}. \quad (11)$$

Используя известные выражения значений функции Грина рассматриваемого объекта [2, 4]

$$G(x, \xi, \varphi - \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(\mu_m x) \cos(\mu_m \xi) \exp(-\mu_m^2 (\varphi - \tau)), \quad (12)$$

$$G(x_i^*, \xi, \varphi - \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(\mu_m x_i^*) \cos(\mu_m \xi) \exp(-\mu_m^2 (\varphi - \tau)), \quad (13)$$

где

$$A_m = \frac{2\mu_m}{\mu_m + \sin \mu_m \cos \mu_m}, \quad (14)$$

и выполняя процедуры интегрирования по пространственной ξ и временной τ координатам, можно перейти к конкретному виду минимаксного критерия (11)

$$I_1(x^*) = \max_{x \in [0,1]} \left| \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\sin(\mu_m)}{\mu_m^3} \cos(\mu_m x) - \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N K_{ni} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\sin(\mu_m)}{\mu_m^3} \cos(\mu_m x_i^*) \cos(\mu_n x) \right) (1 - \exp(-\mu_m^2 (\varphi^0))) \right| \rightarrow \min_{x^*}. \quad (15)$$

Решение СЗМП (15) осуществляется относительно вектора параметров пространственных координат $x^* = (x_i^*)$ на некотором замкнутом ограниченном множестве, на котором разность

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\sin(\mu_m)}{\mu_m^3} \cos(\mu_m x) - \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N K_{ni} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\sin(\mu_m)}{\mu_m^3} \cos(\mu_m x_i^*) \cos(\mu_n x) \right) \times (1 - \exp(-\mu_m^2 (\varphi^0))) \quad (16)$$

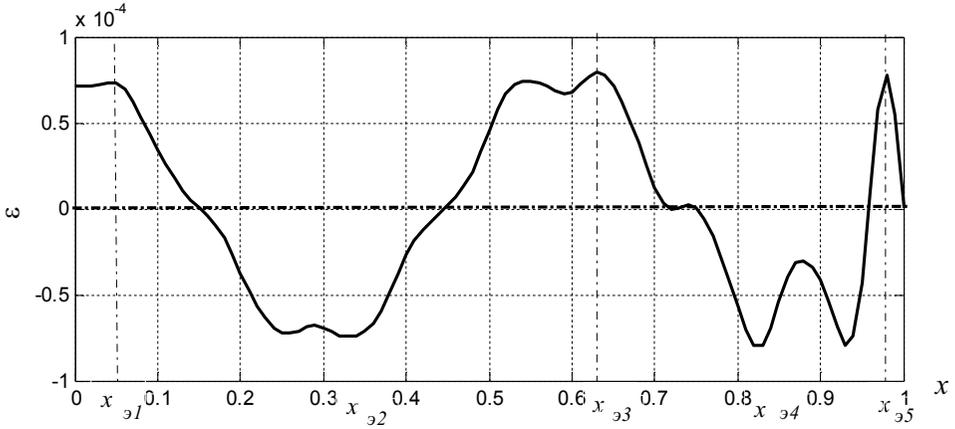
обладает специальными свойствами чебышевского альтернанса [5].

На основании этого на интервале $[0, 1] \ni x$ достигаются знакопередающиеся максимальные по абсолютной величине значения, равные $\pm I_0(\Delta^0)$ в точках, число которых $N + 1$ на единицу превышает число искомых параметров. В соответствии с этим, для различных вариантов допустимой пространственной конфигурации кривой погрешности аппроксимации (16) составляется замкнутая система $N + 1$ соотношений для предельных отклонений в этих точках относительно всех неизвестных. Решение этой системы и дает искомый вектор значений пространственных координат точек размещения наблюдающих устройств.

В качестве примера рассматривался частный случай пространственно-временного управления $F(x, \varphi) = const$ при фиксированном числе наблюдающих устройств $N = 4$. Численным решением соответствующей системы уравнений были найдены оптимальные значения координат точек контроля $x^* = [0.1506; 0.4461; 0.7199; 0.7513]^T$. Температурные зависимости $\theta(x_i^*, \varphi)$,

$i = \overline{1,4}$, полученные в рассчитанных точках x^* , $i = \overline{1,4}$, позволили провести аппроксимацию неизвестного температурного состояния $\theta(x, \varphi)$ на основе его представления в виде суммы в (7).

Полученная при этом результирующая пространственная конфигурация ошибки равномерного приближения температурного поля $\tilde{\theta}(x, x^*, \varphi)$ к его точному значению $\theta^*(x, \varphi)$, представленная на рисунке, на рассматриваемом интервале $[0, 1] \ni x$ отличается наличием пяти упорядоченных по возрастанию точек $x_{\varphi i}$, $i = \overline{1,5}$, в которых достигаются знакопеременные максимальные по абсолютной величине отклонения $\varepsilon(x, \varphi^0) = \theta^0(x, \varphi^0) - \tilde{\theta}(x, x^*, \varphi^0)$.



Ошибка $\varepsilon(x, \varphi^0) = \theta^0(x, \varphi^0) - \tilde{\theta}(x, x^*, \varphi^0)$ равномерного приближения расчетного температурного поля к идентифицируемому температурному состоянию в конечный момент времени φ^0 при оптимальном расположении четырех наблюдающих устройств

Таким образом, решение задачи оптимального расположения наблюдающих устройств может быть основано на возможности аппроксимации неполностью измеряемой функции состояния $\theta(x, \varphi)$ в виде ее разложения в усеченный сходящийся в среднем [5] ряд по ортогональной системе собственных функций $\phi_n(\mu_n, x)$ с временными модами объекта $\bar{\theta}(\varphi) = \{\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)\}$, $n = \overline{1, N}$ в роли коэффициентов ряда. Число учитываемых членов ряда должно быть равно числу точек контроля температурного распределения. При этом для получения адекватных результатов точность полученного описания $\theta(x, \varphi)$ суммой лишь первых N членов ряда должна быть удовлетворительной.

Задача определения координат мест расположения устройств контроля, минимизирующего погрешность восстановления температуры, может быть сведена к специальной задаче математического программирования. При определении координат точек измерения приходится учитывать известные ограничения: для определения временных мод $\bar{\theta}(\varphi)$ на основе (5) или (6) объект должен обладать свойством наблюдаемости, для чего достаточно, чтобы пространственные координаты точек наблюдения x_i^* не являлись нулями ни одной из собственных функций краевой задачи

$\phi_n(\mu_n, x)$ [1]. Влияние остальных неучтенных мод объекта $\bar{\theta}(\varphi) = \{\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)\}$, $n = N + 1, N + 2, \dots$ формирует ошибку аппроксимации $\varepsilon(x, \varphi) = \theta^0(x, \varphi) - \tilde{\theta}(x, x^*, \varphi)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Рапопорт Э.Я.* Анализ и синтез систем управления с распределенными параметрами. М.: Высшая школа, 2005. – 292 с.
2. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. М.: Высшая школа, 2003.
3. *Карташев Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001.
4. *Бутковский А.Г.* Структурная теория распределенных систем. М.: Наука, 1977.
5. *Рапопорт Э.Я.* Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000. – 336 с.

Статья поступила в редакцию 21 февраля 2013 г.

THE OPTIMAL DECISION OF THE SPATIAL COORDINATES OF CONTROL POINTS IN CASE OF INCOMPLETE STATE MEASUREMENTS OF THE PLANT WITH DISTRIBUTED PARAMETERS DURING THE CONTROL ACTIONS IDENTIFICATION

A.N. Diligenskaya, E.Ya. Rapoport

Samara State Technical University
224, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The problem of optimal location of measurement points of the state function of non-steady heat conductivity process to minimize the approximation error is solved. It is considered an uniform error of approximation of Green's function of identified plant by Green's function of investigated boundary value problem.

Keywords: *Green's functions, incomplete state measurements, uniform approximation, alternance method.*