

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ К ВЫВОДУ ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КONTИНУУМА «ИНДЕНТОР – ДЕФОРМИРУЕМАЯ СРЕДА»

Н.В. Овчинникова, Ю.В. Чеботаревский

Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина
410054, Саратов, ул. Политехническая, 77

E-mail: alanita@inbox.ru

Рассматривается контактная задача о напряженно-деформированном состоянии континуума «индентор – контактирующая с ним среда» с учетом искривления поверхности контакта в процессе деформирования. С помощью метода штрафных функций условия на поверхности контакта введены непосредственно в вариационное уравнение движения континуума. Это позволяет свести дальнейшее исследование его напряженно-деформированного состояния каким-либо из численных методов к отысканию безусловного минимума соответствующего функционала. Вариационное уравнение движения континуума получено для произвольной геометрической формы деформирующихся контактных поверхностей и без наложения каких-либо ограничений на геометрические соотношения и физические уравнения материалов тел, его образующих.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, вариационное уравнение, метод штрафных функций.

Введение

В настоящее время большое распространение получили различные технологии обработки деталей пластическим деформированием, возникающим за счет приложения к их поверхностям технологического инструмента с относительно жесткой рабочей поверхностью. В связи с этим весьма актуальным представляется исследование механических процессов, происходящих в обрабатываемом материале при такого рода воздействиях. Как правило, оно сводится к решению контактных задач о взаимодействии жесткого индентора и упругопластической среды. В подавляющем большинстве случаев получить аналитические выражения, описывающие поведение индентора и среды при упругопластическом поведении ее материала в реальном технологическом процессе, практически невозможно. Поэтому возникает необходимость разработки различных подходов к решению подобного рода задач с применением упрощающих допущений и численных методов исследования. Так, в работах [1, 2] для решения осесимметричной задачи о контактном взаимодействии колеблющегося с ультразвуковой частотой абсолютно жесткого индентора с упругопластической средой в форме короткого кругового цилиндра принимается упрощенная физико-математическая модель, основанная на замене реального контактного воздействия рабочего инструмента на материал обрабатываемой среды действием эквивалентной ему, распределенной по определенному закону нагрузки.

Здесь в качестве упрощенного подхода предлагается замена исходной задачи в классической постановке [3] ее вариационным аналогом, получаемым на основе вариационного принципа Даламбера – Лагранжа и метода штрафных функций.

Наталья Владимировна Овчинникова, ассистент кафедры «Техническая механика и детали машин».

Юрий Викторович Чеботаревский (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ».

В качестве исходной за основу примем математическую модель, предложенную в работах [1-3], согласно которой в окрестностях локальной зоны контакта в обрабатываемой среде выделим некоторый объем в виде кругового цилиндра высоты h_2 и радиуса R_2 , к центру одной из торцевых поверхностей которого прикладывается рабочий инструмент в виде индентора со сферической рабочей поверхностью. Силовое воздействие рабочего органа на материал среды будем моделировать путем приложения к индентору направленного вдоль общей оси симметрии индентора и цилиндра динамического усилия $F(t)$, где t – время. Будем полагать, что как упругие, так и пластические деформации материалов среды и индентора являются малыми и что твердость материала рабочей поверхности индентора значительно выше твердости обрабатываемого материала. Возникающими при контакте силами трения и выделяемой при взаимодействии контактирующих тел теплотой будем пренебрегать, считая процесс деформирования изотермическим.

Отнесем цилиндр и индентор к цилиндрической системе координат $Or\theta z$, расположив ее начало в центральной точке контактной поверхности и направив ось z вдоль общей оси симметрии индентора и цилиндра вглубь среды. Обозначим через v_r^l , v_z^l и δv_r^l , δv_z^l ($l = I, II$) проекции векторов скорости движения точек континуума и их вариации на оси координат, а через σ_{ij}^l ($i, j = r, \theta, z$) ($l = I, II$) – компоненты тензора напряжений, где $l = I$ означает, что соответствующая величина относится к индентору, а $l = II$ – к среде. Тогда вариационное уравнение движения континуума «индентор – среда», полученное на основе вариационного принципа Даламбера – Лагранжа в работе [3] и эквивалентное сформулированной выше исходной задаче, в общем случае может быть записано так:

$$\delta\Phi(r, z, t) = \int_0^{R_2} \int_0^{h_2} f^{II} r dz dr + \int_0^{R_1} \int_{\chi_I(R_1, t) - h_1}^{\chi_I(r, t)} f^I r dz dr - \int_0^{R_1} \delta v_z^I p r dr = 0, \quad (1)$$

где

$$f^l(r, z, t) = \sigma_{rr}^l \frac{\partial}{\partial r} (\delta v_r^l) + \delta v_r^l \frac{\sigma_{\theta\theta}^l}{r} + \sigma_{rz}^l \frac{\partial}{\partial z} (\delta v_r^l) + \delta v_r^l \rho^l \frac{d v_r^l}{dt} \quad (l = I, II), \quad (2)$$

$$+ \sigma_{zz}^l \frac{\partial}{\partial z} (\delta v_z^l) + \sigma_{zr}^l \frac{\partial}{\partial r} (\delta v_z^l) + \delta v_z^l \rho^l \frac{d v_z^l}{dt},$$

$p(t)$ – равномерно распределенная нагрузка по верхней торцевой поверхности индентора, эквивалентная приложенной к нему сосредоточенной силе

$$F(t) = 2\pi \int_0^{R_1} p(t) r dr,$$

ρ^l ($l = I, II$) – плотность материала среды или индентора соответственно;

R_1 и h_1 – радиус и высота цилиндрической части индентора;

t – время;

$\chi_l(r, t)$ ($l = I, II$) – пока не определенные функции, входящие в уравнения контактных поверхностей индентора и среды:

$$\tilde{\chi}_l(r, z, t) = z - \chi_l(r, t) = 0 \quad (l = I, II). \quad (3)$$

Вариационное уравнение (2) описывает движение среды и индентора с учетом граничных условий на поверхностях континуума и обобщенного контактного условия, но без учета условия «непроникновения» [3]

$$\gamma_n = v_n^I + v_n^{II} \leq 0 \quad (4)$$

и требования $\sigma_{nn}^l < 0$ ($l = I, II$) в области контакта, где v_n^l – проекции векторов скорости принадлежащих индентору и среде точек возможного контакта в направлении соответствующей нормали, связанные с проекциями скорости на оси системы координат Oxz соотношениями

$$v_n^l = v_r^l n_r^l + v_z^l n_z^l, \quad (l = I, II), \quad (5)$$

а σ_{nn}^l – нормальные компоненты вектора напряжений на площадках, перпендикулярных внешним нормальям деформированных поверхностей индентора и среды в области контакта и ее окрестностях, связанные с компонентами тензора напряжений σ_{ij}^l ($i, j = r, \theta, z$) известными соотношениями [4]

$$\sigma_{nn}^l = n_z^l (\sigma_{zz}^l n_z^l + \sigma_{zr}^l n_r^l) + n_r^l (\sigma_{rz}^l n_z^l + \sigma_{rr}^l n_r^l) \quad (l = I, II). \quad (6)$$

В выражениях (5) n_r^l и n_z^l – направляющие косинусы главных внешних нормалей $\bar{n}^I$ и $\bar{n}^{II}$ деформированных поверхностей индентора и среды, включая и область контакта, определяемые из соотношений

$$n_r^l = (-1)^{l+1} \frac{\frac{\partial \tilde{\chi}_l}{\partial r}}{\sqrt{\left[\frac{\partial \tilde{\chi}_l}{\partial r} \right]^2 + \left[\frac{\partial \tilde{\chi}_l}{\partial z} \right]^2}}; \quad n_z^l = (-1)^{l+1} \frac{\frac{\partial \tilde{\chi}_l}{\partial z}}{\sqrt{\left[\frac{\partial \tilde{\chi}_l}{\partial r} \right]^2 + \left[\frac{\partial \tilde{\chi}_l}{\partial z} \right]^2}} \quad (l = I, II). \quad (7)$$

Для того чтобы учесть ограничение (5) непосредственно в вариационном уравнении движения среды (1), а также требование $\sigma_{nn}^l < 0$ ($l = I, II$) в области контакта, воспользуемся методом штрафных функций. Особенность использования этого метода в контактных задачах состоит в том, что его применение допускает возможность проникновения тела индентора в материал среды. Причем уровень проникновения существенно зависит от выбора вида штрафной функции. Следуя [5], в данном случае представим ее выражение в виде

$$\psi(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \psi \left\{ g_z(z), \gamma_n(v_n) \right\} H \left\{ g_z(z) \right\}. \quad (8)$$

В соотношении (8) функция $g_z(z)$ исходя из физических соображений может быть задана в форме, содержащей сомножитель в виде разности осевых координат z^I и z^{II} точек возможного контакта, лежащих на поверхности среды и рабочей поверхности индентора соответственно (см. рисунок), а именно

$$g_z(z) = \alpha (z^I - z^{II}). \quad (9)$$

В (8) и (9) $H \left\{ g_z(z) \right\}$ – функция Хэвисайда, а α – некоторый коэффициент.

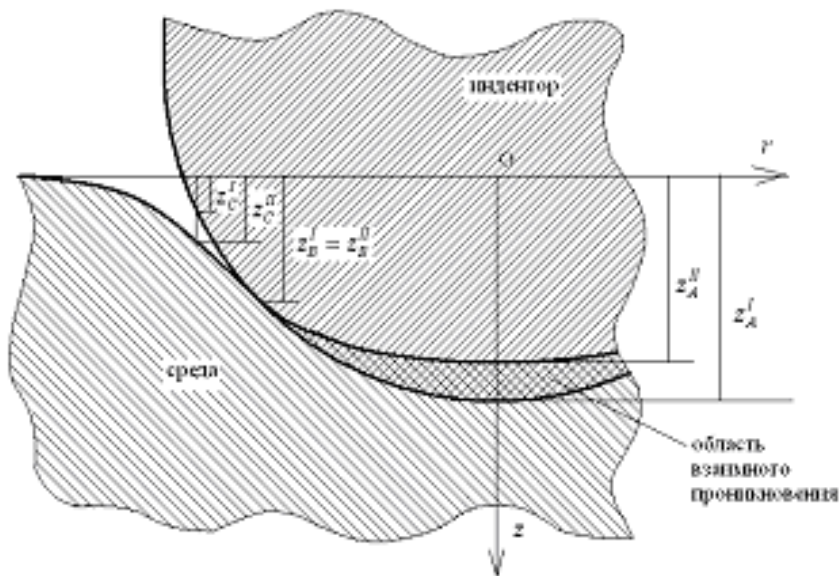


Схема взаимопроникновения индентора и среды

На рисунке значениям координат $z^I - z^{II} = 0$ соответствует зона идеального контакта поверхностей индентора и среды, $z^I - z^{II} > 0$ — область взаимопроникновения (выделена двойной штриховкой), а $z^I - z^{II} < 0$ соответствует зона, в которой контакт возможен, но в данный момент времени не реализован. Представление штрафной функции в виде (8) с учетом (9) позволяет сделать штрафную функцию положительно определенной, что обеспечивает выполнение требования $\sigma_{nn}^{II} < 0$ в области контакта, и отличной от нуля только в точках возможного проникновения тела индентора в материал среды.

Учитывая выражения для нормальной и касательной составляющих вектора скорости произвольной точки континуума (5), представим вариацию функции проникновения (4) так:

$$\delta\gamma_n = \delta v_r^I n_r^I + \delta v_z^I n_z^I + \delta v_r^{II} n_r^{II} + \delta v_z^{II} n_z^{II}. \quad (10)$$

Умножая (8) на вариацию $\delta\gamma$ (10) и интегрируя затем полученное выражение по поверхности контакта, с учетом правила сведения поверхностного интеграла к обыкновенному имеем:

$$\delta\Psi = \int_0^a \frac{1}{n_z^I} \delta\gamma_n \Psi \{g_z(z), \gamma_n(v_n)\} H\{g_z(z)\} r dr, \quad (11)$$

где a — радиус контактной поверхности.

Добавляя (11) в левую часть уравнения (1), получаем:

$$\delta\Pi(r, z, t) = \delta\{\Phi(r, z, t) + \Psi(r, z, t)\} = 0. \quad (12)$$

В (12) входят до сих пор не определенные направляющие косинусы главных нормалей деформированных поверхностей индентора и среды, возникающих в результате их взаимодействия. Для того чтобы выразить их значения через подлежа-

щие определению составляющие вектора перемещения u_r^I и u_z^I точек, лежащих на этих поверхностях, проведем следующие рассуждения.

Очевидно, что выражения для текущих координат любой точки индентора и среды, лежащей на деформированных поверхностях в области и окрестностях возможного контакта, в системе координат Orz могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} r^I &= r_n^I + u_r^I(r_n^I, z_n^I, t); \quad (I = I, II); \\ z^I &= z_n^I + u_z^I(r_n^I, z_n^I, t), \end{aligned} \quad (13)$$

где r_n^I и z_n^I – начальные значения координат соответствующей точки континуума, а t – момент времени, в который эти текущие координаты определяются. Соотношения (13) представляют собой уравнения деформированных поверхностей индентора и среды в параметрической форме. Используя их, можно выразить производные от левых частей уравнений (3), входящие в выражения для направляющих косинусов (7), через искомые компоненты вектора перемещений точек континуума, лежащих на поверхностях возможного контакта. Опуская промежуточные рассуждения, получаем:

$$n_r^I = - \frac{\frac{\partial u_z^I}{\partial r} - \frac{r}{\sqrt{R_0^2 - r^2}} \left(1 + \frac{\partial u_z^I}{\partial z} \right)}{\sqrt{\left[\frac{\partial u_z^I}{\partial r} - \frac{r}{\sqrt{R_0^2 - r^2}} \left(1 + \frac{\partial u_z^I}{\partial z} \right) \right]^2 + \left[1 + \frac{\partial u_r^I}{\partial r} - \frac{\partial u_r^I}{\partial z} \frac{r}{\sqrt{R_0^2 - r^2}} \right]^2}}; \quad (14)$$

$$n_z^I = \frac{1 + \frac{\partial u_r^I}{\partial r} - \frac{\partial u_r^I}{\partial z} \frac{r}{\sqrt{R_0^2 - r^2}}}{\sqrt{\left[\frac{\partial u_z^I}{\partial r} - \frac{r}{\sqrt{R_0^2 - r^2}} \left(1 + \frac{\partial u_z^I}{\partial z} \right) \right]^2 + \left[1 + \frac{\partial u_r^I}{\partial r} - \frac{\partial u_r^I}{\partial z} \frac{r}{\sqrt{R_0^2 - r^2}} \right]^2}}; \quad (15)$$

$$n_r^{II} = \frac{\frac{\partial u_z^{II}}{\partial r}}{\sqrt{\left[1 + \frac{\partial u_r^{II}}{\partial r} \right]^2 + \left[\frac{\partial u_z^{II}}{\partial r} \right]^2}}; \quad n_z^{II} = - \frac{1 + \frac{\partial u_r^{II}}{\partial r}}{\sqrt{\left[1 + \frac{\partial u_r^{II}}{\partial r} \right]^2 + \left[\frac{\partial u_z^{II}}{\partial r} \right]^2}}. \quad (16)$$

При записи (14) – (16) учитывалось, что на основании (3)

$$\frac{\partial \tilde{\chi}_I}{\partial r} = - \frac{\partial \chi_I}{\partial r}, \quad \frac{\partial \tilde{\chi}_I}{\partial z} = 1, \quad (I = I, II)$$

и то, что начальные значения координат точек, лежащих на недеформированных поверхностях возможного контакта, не являются независимыми, а связаны между собой соотношениями:

$$z_I(r) = \sqrt{R_0^2 - r^2} - R_0; \quad z_{II}(r) = 0.$$

Докажем, что вариационное уравнение движения континуума (12) содержит в себе постановку исходной задачи. С этой целью с учетом (2) и соотношений

$$\begin{aligned}\delta v_r^I &= \delta v_n^I n_r^I - \delta v_z^I n_z^I, \quad \delta v_z^I = \delta v_n^I n_z^I + \delta v_\tau^I n_\tau^I, \quad (I = I, II); \\ \sigma_{n\tau}^I &= n_z^I (\sigma_{rz}^I n_z^I + \sigma_{rr}^I n_r^I) - n_r^I (\sigma_{zz}^I n_z^I + \sigma_{zr}^I n_r^I), \quad (I = I, II)\end{aligned}$$

с применением теоремы Остроградского – Гаусса преобразуем правую часть (12) следующим образом:

$$\begin{aligned}& - \int_0^{R_2} \int_{\chi_{II}(r,t)}^{h_2} \left[\delta v_r^{II} \left(\frac{\partial \sigma_{rr}^{II}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^{II}}{r} - \frac{\sigma_{\theta\theta}^{II}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{II}}{\partial z} - \rho^{II} \frac{d^2 u_r^{II}}{dt^2} \right) + \right. \\& + \delta v_z^{II} \left(\frac{\partial \sigma_{zz}^{II}}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{zr}^{II}) - \rho^{II} \frac{d^2 u_z^{II}}{dt^2} \right) \Big] r dz dr + \int_0^{R_2} (\delta v_r^{II} r \sigma_{rz}^{II})_{z=h_2} dr + \\& + \int_0^{R_2} (\delta v_z^{II} r \sigma_{zz}^{II})_{z=h_2} dr - \int_0^{R_1} \int_{\chi_I(R_1,t)-h_1}^{\chi_I(r,t)} \left[\delta v_r^I \left(\frac{\partial \sigma_{rr}^I}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^I}{r} - \frac{\sigma_{\theta\theta}^I}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^I}{\partial z} - \rho^I \frac{d^2 u_r^I}{dt^2} \right) + \right. \\& + \delta v_z^I \left(\frac{\partial \sigma_{zz}^I}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{zr}^I) - \rho^I \frac{d^2 u_z^I}{dt^2} \right) \Big] r dz dr - \int_0^{R_1} (\delta v_r^I r \sigma_{rz}^I)_{z=\chi_I(R_1,t)-h_1} dr \\& + R_2 \left(\int_0^{h_2} (\delta v_z^{II} \sigma_{zr}^{II})_{r=R_2} dz + \int_0^{h_2} (\delta v_r^{II} \sigma_{rr}^{II})_{r=R_2} dz \right) - \int_0^{R_2} \frac{1}{n_z^{II}} (\delta v_\tau^{II} \sigma_{n\tau}^{II})_{z=\chi_{II}(r,t)} r dr + \\& + R_1 \left(\int_{\chi_I(R_1,t)-h_1}^{\chi_I(R_1,t)} (\delta v_z^I \sigma_{zr}^I)_{r=R_1} dz + \int_{\chi_I(R_1,t)-h_1}^{\chi_I(R_1,t)} (\delta v_r^I \sigma_{rr}^I)_{r=R_1} dz \right) + \int_0^{R_1} \frac{1}{n_z^I} (\delta v_\tau^I \sigma_{n\tau}^I)_{z=\chi_I(r,t)} r dr + \\& + \int_a^{R_1} \frac{1}{n_z^I} (\delta v_n^I \sigma_{nn}^I)_{z=\chi_I(r,t)} r dr - \int_a^{R_2} \frac{1}{n_z^{II}} (\delta v_n^{II} \sigma_{nn}^{II})_{z=\chi_{II}(r,t)} r dr - \\& - \int_0^{R_1} \delta v_z^I \left(\sigma_{zz}^I \Big|_{z=\chi_I(R_1,t)-h_1} - p \right) r dr + \int_0^a \frac{\delta v_n^I}{n_z^I} (\sigma_{nn}^I + \psi \{g_z(z), \gamma_n(v_n)\} H\{g_z(z)\}) r dr - \\& - \int_0^a \frac{\delta v_n^{II}}{n_z^{II}} (\sigma_{nn}^{II} + \psi \{g_z(z), \gamma_n(v_n)\} H\{g_z(z)\}) r dr = 0.\end{aligned}\tag{17}$$

Интегралы, входящие в уравнение (17), имеют различные пределы интегрирования. Поэтому выполнение этого уравнения возможно лишь в случае, когда каждый из них равен нулю. С учетом этого и того, что вариации скоростей движения точек континуума произвольны, из двойных интегралов формулы (17) следуют четыре уравнения движения индентора и среды:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}^I}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^I}{r} - \frac{\sigma_{\theta\theta}^I}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^I}{\partial z} - \rho^I \frac{d^2 u_r^I}{dt^2} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{zz}^I}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{zr}^I) - \rho^I \frac{d^2 u_z^I}{dt^2} &= 0 \quad (I = I, II).\end{aligned}\tag{18}$$

Оставшиеся интегралы, за исключением двух последних, в силу произвольности вариаций скоростей дают граничные условия на поверхностях индентора и среды,

свободных от внешней нагрузки, условие приложения усилия к верхней поверхности индентора и условие жесткого закрепления нижней поверхности ограничивающего среду объема:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^I \Big|_{r=R_1} = 0, \quad \sigma_{rr}^{II} \Big|_{r=R_2} = 0, \quad \sigma_{rz}^I \Big|_{r=R_1} = 0, \quad \sigma_{rz}^{II} \Big|_{r=R_2} = 0; \\ \delta v_r^{II} \Big|_{z=h_2} = 0, \quad \delta v_z^{II} \Big|_{z=h_2} = 0, \quad \sigma_{rz}^I \Big|_{z=\chi_I(R_1,t)-h_1} = 0, \quad \sigma_{zz}^I \Big|_{z=\chi_I(R_1,t)-h_1} = p; \\ \sigma_{nn}^I \Big|_{z=\chi_I(r,t)} = \sigma_{n\tau}^I \Big|_{z=\chi_I(r,t)} = 0 \quad \text{при } a \leq r \leq R_1; \\ \sigma_{nn}^{II} \Big|_{z=\chi_{II}(r,t)} = \sigma_{n\tau}^{II} \Big|_{z=\chi_{II}(r,t)} = 0 \quad \text{при } a \leq r \leq R_2; \\ \sigma_{n\tau}^I \Big|_{z=\chi_I(r,t)} = \sigma_{n\tau}^{II} \Big|_{z=\chi_{II}(r,t)} = 0 \quad \text{при } 0 \leq r \leq a. \end{aligned} \quad (19)$$

Из двух последних интегралов следует равенство контактных напряжений на площадках нормальных к контактной поверхности с одновременным выполнением требования их отрицательности:

$$\sigma_{nn}^I = \sigma_{nn}^{II} = -\Psi \{g_z(z), \gamma_n(v_n)\} H \{g_z(z)\} \leq 0 \quad \text{при } 0 \leq r \leq a. \quad (20)$$

Уравнения движения континуума (18) с граничными и контактными условиями (19) и (20) представляют собой постановку исходной задачи. Таким образом, эквивалентность задачи в вариационной постановке исходной доказана.

Заключение

Полученное выше с использованием метода штрафных функций вариационное уравнение движения (12) является основой для исследования напряженно-деформированного состояния тел, образующих континуум. С его помощью решение исходной задачи с применением какого-либо из численных методов может быть сведено к отысканию полей скоростей точек индентора и среды, обеспечивающих безусловный минимум функционала $\Pi(r, z, t)$. При этом следует отметить, что уравнение (12) универсально в том смысле, что оно получено без наложения каких-либо ограничений на форму деформированных поверхностей индентора и среды вследствие контакта, геометрические соотношения и физические уравнения, определяющие состояние материала тел (упругое, пластическое, упругопластическое, вязкоупругое, вязкоупругопластическое), образующих континуум. Поэтому при решении конкретных задач уравнение (12) должно быть дополнено соответствующими геометрическими, кинематическими и физическими соотношениями, а также условиями для определения границ области контакта.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Овчинникова Н.В. Модельная задача для исследования процессов поверхностного упрочнения пластическим деформированием с применением ультразвуковых воздействий / Н.В. Овчинникова, Д.Г. Павлов, Ю.В. Чеботаревский // Вестник СГТУ. – 2007. – № 4(28). – Вып. 1. – С. 14-18.
2. Овчинникова Н.В. К расчету напряженно-деформированного состояния упругопластического полупространства, контактирующего с абсолютно жестким индентором / Н.В. Овчинникова, Ю.В. Чеботаревский // Вестник СГТУ. 2010. – № 4(51). – Вып. 3. – С. 10-17.
3. Овчинникова Н.В. Вариационное уравнение движения континуума «жесткий индентор – деформируемая среда» / Н.В. Овчинникова, Ю.В. Чеботаревский // Вестник СГТУ. – 2011. – № 4(60). – Вып. 2. – С. 48-57.
4. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.

5. Belytschko T. Nonlinear finite elements for continua and structures / T. Belytschko, W.K. Liu, B. Moran // Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2000. – P. 666.

Статья поступила в редакцию 1 ноября 2012 г.

APPLICATION OF PENALTY METHOD TO DERIVATION OF VARIATIONAL MOTION EQUATION OF CONTINUUM «INDENTER – DEFORMABLE MEDIUM»

N.V. Ovchinnikova, U.V. Chebotarevsky

Contact problem for strain-stress analysis of continuum “indenter – deformable medium” is formulated with consideration of curvature of the deformed surfaces. Penalty method is employed to insert the constraints on contact surface directly into variational equation of motion. It allowed to conduct further strain-stress analysis by finding unconstrained minimum of corresponding functional using numerical methods. Variational motion equation is derived without specifying definite geometrical form of deformed contact interfaces, strain-displacement relations and constitutive equations for materials of bodies the continuum consists of.

Keywords: *contact interaction, deflected mode, variational equation, penalty method.*