УДК 681.518.3

# КАЛИБРОВКА СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБРАТНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

***В.Я. Купер*[1], *М.Г. Рубцов*[2]**

[1]Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

[2]ООО «Научно-производственный центр ПАЛС»
443095, г. Самара, ул. Ташкентская, 196

E-mail: mg.rubtsov@mail.ru

*Рассматриваются методы калибровки средств измерений, основанные на использовании обратных математических моделей функции преобразования и различных весовых функций для погрешностей.*

***Ключевые слова:*** *калибровка средств измерений, погрешность измерений, взвешенный метод наименьших квадратов.*

Целью калибровки конкретного экземпляра средства измерения (измерительного прибора, измерительного канала информационно-измерительной системы) является построение индивидуальной эмпирической модели его функции преобразования.

Обычно эта задача решается путем проведения активного регрессионного эксперимента, в результате которого строится прямая математическая модель функции преобразования

$$Y = F(X, a_0, a_1, ..., a_m),$$

где $X$ – входная величина; $Y$ – выходная величина; $F$ – функция заданного вида; $a_0, a_1, ... a_m$ – неизвестные параметры.

В процессе калибровки задают ряд $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \geq m+1)$ значений $X$ и получают ряд $y_1, y_2, ... y_n$ значений $Y$.

Для получения оптимальных оценок параметров $a_0, a_1, ..., a_m$ обычно используют метод наименьших квадратов, в котором минимизируется функция

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[ y_i - F(x_i, a_0, a_1, ..., a_m) \right]^2 .$$

Следовательно, в этом случае минимизируются (в среднеквадратическом смысле) абсолютные погрешности во всем диапазоне измерений. Однако такая ситуация далеко не всегда оказывается удовлетворительной по следующим причинам:

1) в ряде случаев необходимо во всем диапазоне измерения минимизировать не абсолютную, а относительную погрешность измерений;

2) в конкретных условиях проведения измерений иногда возникает необходимость обеспечить максимальную точность измерений в определенной области (или областях) рабочего диапазона измерений.

Указанные задачи могут быть решены, если при калибровке средства измерений

---

*Виталий Яковлевич Купер (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Информационно-измерительная техника».*

*Михаил Геннадьевич Рубцов (к.т.н.), директор [2]ООО «Научно-производственный центр ПАЛС».*

ввести весовую функцию $\rho(x)$, отражающую значимость абсолютной погрешности в различных областях диапазона измерений. Так как $\rho(x)$ есть функция значения измеряемой величины, то целесообразно использовать обратную математическую модель функции преобразования

$$X = F(Y, b_0, b_1, ..., b_m) \ ,$$

где $b_0, b_1, ..., b_m$ – неизвестные параметры.

В процессе калибровки задают ряд $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \geq m+1)$ значений $X$ и получают ряд $y_1, y_2, ... y_n$ значений $Y$. Каждому значению $x_i (i = 1,2,...,n)$ соответствует значение $\rho(x_i)$ весовой функции. Для вычисления оптимальных оценок неизвестных параметров $b_0, b_1, ..., b_m$ используем взвешенный метод наименьших квадратов, в котором минимизируется функция

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i) \cdot \left[x_i - F(y_i, b_0, b_1, ..., b_n)\right]^2 .$$

На практике чаще всего применяют обратную математическую модель в виде степенного полинома, линейную относительно коэффициентов регрессии:

$$X = b_0 + b_1 \cdot Y + ... + b_m \cdot Y^m .$$

В матричном виде оптимальные оценки коэффициентов регрессии равны [1]

$$B = (Y^T \rho Y)^{-1} Y^T \rho X \ ,$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & ... & y_1^m \\ 1 & y_2 & ... & y_2^m & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & y_n & & y_n^m \end{bmatrix}; \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}; \ B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix}; \ \rho = \begin{bmatrix} \rho(x_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & \rho(x_2) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \rho(x_n) \end{bmatrix}.$$

Приведенное выше решение задачи построения обратной математической модели является общим и позволяет находить оптимальное решение при любой конкретной весовой функции $\rho(x)$. В качестве примера рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся ситуации.

*Пример 1.* Минимизация абсолютной (или приведенной) погрешности во всем диапазоне измерений.

В этом случае весовая функция $\rho(x) \equiv 1$, а матрица весов имеет вид

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ,,, & 0 \\ 0 & 1 & ,,, & 0 \\ ,,, & ,,, & ,,, & ,,, \\ 0 & 0 & ,,, & 1 \end{bmatrix},$$

т. е. имеет место обычный («невзвешенный») метод наименьших квадратов.

*Пример 2.* Минимизация относительной погрешности во всем диапазоне измерений.

В этом случае весовая функция $\rho(x) = 1/x$, а матрица весов имеет вид

$$\rho = \begin{bmatrix} 1/x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/x_n \end{bmatrix}.$$

Этот случай имеет место при калибровке широкодиапазонных средств измерений, когда экспериментатора интересует относительная погрешность результатов измерений, например при калибровке широкодиапазонных средств измерения удельной электрической проводимости жидкости [2].

*Пример 3.* Минимизация абсолютной погрешности в двух поддиапазонах измерений с различными весами.

Пусть весь диапазон измерений $[x_{\min}, x_{\max}]$разделен на два поддиапазона: $[x_{\min}, x_d]$ и $[x_d, x_{\max}]$, причем в первом поддиапазоне необходимо обеспечить абсолютную погрешность в $K$ раз меньшую, чем во втором.

Допустим, что при калибровке из общего числа $n$ экспериментальных точек $n_1$ находятся в первом поддиапазоне, а $(n - n_1)$ – во втором.

В этом случае весовая функция имеет вид $\rho(x) \equiv K$ ($K > 1$), если $x \in [x_{\min}, x_d]$, и $\rho(x) \equiv 1$, если $x \in [x_d, x_{\max}]$. Соответственно матрица весов равна

$$\rho = \begin{bmatrix} K & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots. & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Этот пример имеет место, когда средство измерений должно быть откалибровано во всем рабочем диапазоне измерений, но в первом диапазоне должна быть обеспечена более высокая точность измерений.

Ниже приведены результаты калибровки канала измерения электрической проводимости жидкости комплексной скважинной аппаратуры «КОМПАС» при использовании рассмотренных выше методов калибровки (примеры 1 и 2).

Калибровка проводилась в диапазоне удельных электрических проводимостей от 0,4 до 50 См/м. Калибровочные растворы представляли собой растворы NaCl в дистиллированной воде. Было использовано 8 термостатированных растворов, проводимости которых в логарифмическом масштабе были примерно равноотстоящими друг от друга. В каждом растворе фиксировался выходной код АЦП.

В качестве математической модели измерительного канала применена линейная обратная модель

$$\sigma = b_0 + b_1 \cdot N,$$

где $\sigma$ – измеряемая удельная электрическая проводимость (См/м);

$N$ – выходной код АЦП.

Оптимальные оценки коэффициентов $b_0$ и $b_1$, вычисленные по экспериментальным данным для $\rho(x) \equiv 1$, равны $b_0 = -1{,}5405 \cdot 10^{-3}$ См/м и $b_1 = 3{,}4588 \cdot 10^{-6}$ См/м.

Те же самые экспериментальные данные были обработаны для $\rho(x) \equiv 1/x$. При этом оптимальные оценки коэффициентов $b_0$ и $b_1$ равны $b_0 = -1{,}5029 \cdot 10^{-3}$ См/м и $b_1 = 3{,}4528 \cdot 10^{-6}$ См/м.

При этом в первом случае ($\rho(x) \equiv 1$) модули абсолютной и относительной погрешностей не превышают 3 мкСм/см и 4 % соответственно. Во втором случае ($\rho(x) \equiv 1$) модули абсолютной и относительной погрешностей не превышают 3 мкСм/см и 0,5 % соответственно. Таким образом, использование взвешенного метода оценивания параметров обратной математической модели измерительного канала позволило при незначительном изменении абсолютной погрешности существенно (почти на порядок) уменьшить относительную погрешность измерений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1976. – 279 с.
2. *Купер В.Я., Пономарева А.А.* Калибровка широкодиапазонных средств измерения электрической проводимости жидкости // Информационно-измерительные и управляющие системы: Сб. науч. статей. – Вып. 2(7). – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2012. – 128 с.

*Статья поступила в редакцию 2 февраля 2013 г.*

## CALIBRATION OF MEASURING INSTRUMENTS USING REVERSE MATHEMATICAL MODELS

***V.Ya. Kuper*[1], *M.G. Rubtsov*[2]**

[1]Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

[2]«Scientific Production Center PALS»
196, Nashkentskaya, Samara, 443095

*Methods of calibration measuring instruments based on using inverse mathematical models of transfer function and different weight functions for accuracy are considered in this paper.*

***Keywords:*** *calibration measuring instruments, inaccuracy of measurements, weighted least-squares method.*

*Vitali Ya. Kuper, Associate Professor.*
*Michael G. Rubtsov (Ph.D. (Techn.)), director.*