УДК 621.3.064.43

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ

А.А. Воронин, П.А. Кулаков

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Предложены методы определения параметров моделей электрической дуги отключения по результатам пассивного эксперимента, применимые к широкому классу интегральных моделей дуги.

***Ключевые слова**: электрическая дуга, интегральные динамические модели электрической дуги, методы определения параметров моделей электрической дуги.*

Стремление исследователей возможно более точно описать поведение дуги отключения в рамках интегральной модели привело к тому, что модели дуги, описываемые нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами (модели типа Майра и Касси), были преобразованы в модели, описываемые дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами (например модифицированные модели Майра – Хохрайнера), и модели дуги с изменяющимися геометрическими размерами [1]. В связи с этим задача определения параметров моделей дуги существенно усложнилась. В то же время возросли требования к точности определения параметров. Так, по данным, приведенным в работе [2], отклонение параметров в модифицированной модели Майра на 10 % приводит к погрешности в определении отключающей способности выключателя величиной в 30 %. А такая разница в величине отключающей способности соответствует для выключателя переходу от одного нормируемого уровня отключаемых токов к другому.

Таким образом, для того чтобы использовать в инженерной практике модели дуги с переменными коэффициентами или модели с изменяющимися геометрическими размерами дуги, необходимо иметь точную и надежную методику определения параметров моделей дуги. Эта методика должна давать возможность находить параметры модели дуги по любой осциллограмме процесса коммутации и для любого момента времени на этой осциллограмме. Для того чтобы получить универсальную методику определения параметров моделей дуги, сформулируем задачу по их определению в общем виде.

Задача по определению параметров динамических моделей дуги формулируется в общем виде следующем образом [3]. Пусть имеется система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = f_i(\vec{x}, \vec{a}, t), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

где $\vec{a}$ – вектор определяемых параметров; например в случае модели Майра это постоянная времени дуги и мощность теплоотвода от ствола дуги.

Часть переменных x_i, например проводимость дуги, не могут быть непосредственно получены в эксперименте, а определяются по наблюдаемым переменным y_j,

Александр Анатольевич Воронин (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Электрические станции».

Павел Алексеевич Кулаков (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Электрические станции».

например току и напряжению дуги:

$$x_i = h\,((\vec{y}\,(t), \vec{\xi}\,), \tag{2}$$

где $\vec{\xi}$ – вектор случайных величин, влияющих на измерения в момент времени *t*.

Положим, что форма функций f_i и h_j и статистические свойства $\vec{\xi}$ известны. Тогда задача заключается в нахождении оценки для вектора параметров $\vec{a}$ по наблюдаемым значениям $\vec{y}$. Для этого могут использоваться такие известные методы, как метод наименьших квадратов, метод максимального правдоподобия, байесовский метод оценивания [4]. Наибольшее распространение в практических расчетах для оценивания параметров получил метод наименьших квадратов, так как использование его не требует знания закона распределения ошибок наблюдений. Для получения оценок вектора параметров методом наименьших квадратов необходимо минимизировать функцию суммы квадратов невязок:

$$\Phi(\vec{a}) = \sum_{k=1}^{n} \left[f_k(\vec{x}, \vec{a}, t) - \dot{x}_k \right]^2 . \tag{3}$$

Задача нелинейного оценивания, выраженная в форме условия минимума функции (3), является задачей оптимизации в пространстве параметров, когда величины x_k и $\dot{x}_k$ считаются заданными, а параметры $\vec{a}$ – переменными; *n* – число наблюдений в выборке исходных данных.

Многие методы решения задачи детерминистической нелинейной оптимизации [5] можно с успехом перенести и на данную задачу. Описанный метод всегда позволяет получить оценки параметров модели дуги, но по следующим причинам этим оценкам не всегда можно давать широкую физическую интерпретацию.

Во-первых, принимаемая форма функции $f(\vec{x}, \vec{a}, t)$, то есть структура модели, всегда в некоторой степени является предположительной, так как получается при пренебрежении некоторыми эффектами, которые предполагаются малыми или не существенными. Поэтому можно говорить лишь о получении оценок параметров модели дуги, отличающихся от соответствующих параметров самой дуги в той степени, в которой модель описывает поведение дуги.

Во-вторых, если малым изменениям значений переменных соответствуют большие изменения параметров, а эксперименты проводятся в небольшой зоне возможных изменений переменных, то в этом случае по результатам наблюдений можно прийти к неверным оценкам параметров. Следовательно, для достоверной оценки параметров модели дуги диапазон изменения переменных величин, входящих в модель, должен по возможности охватывать всю рабочую область, а распространение полученных результатов за пределы диапазона экспериментов нужно производить очень осторожно.

Для идентификации параметров моделей дуги необходимо минимизировать целевую функцию, представляющую собой сумму квадратов невязок (3). Минимизация целевой функции в этом случае должна осуществляться либо в один, либо в два этапа [6]. Это зависит от того, какую оценку – локальную или интегральную – необходимо получить.

На первом этапе минимизации естественно использовать метод наименьших квадратов, так как он не требует знания начального приближения при определении

неизвестных. Метод наименьших квадратов дает интегральную оценку параметров модели дуги по обрабатываемой выборке экспериментальных данных. Дальнейшее уточнение значений параметров для каждого наблюдения возможно провести одним из градиентных методов [5], например методом скорейшего спуска, начальные приближения параметров для которого целесообразно взять из расчета по методу наименьших квадратов.

Метод наименьших квадратов может применяться для идентификации моделей, которые линейны по параметрам [7]. Поэтому прежде чем приступить к минимизации целевой функции суммы квадратов невязок (3), которые для многих моделей дуги являются нелинейными относительно параметров модели, необходимо путем замены переменных привести ее к линейному виду [8].

Метод скорейшего спуска можно применить для минимизации лишь положительно определенных форм типа (3) [5]. Положительно определенной функция (3) будет в том случае, если для всех ненулевых значений вектора $\vec{a}$ выполняется неравенство [9]

$$\vec{a}^{\,t} \cdot x \cdot \vec{a} > 0\,, \tag{4}$$

где $\vec{a}$ – вектор параметров; x – матрица коэффициентов.

Таким образом, прежде чем минимизировать целевую функцию (3), необходимо доказать, что она является положительно определенной. Уточнение параметров производится до тех пор, пока значение градиента или функции $\Phi(\vec{a})$ не станет меньше наперед заданной малой величины ε.

Если данные в обрабатываемой выборке сильно зашумлены, то параметры модели дуги, определенные методом наименьших квадратов или методом скорейшего спуска, могут принимать отрицательные значения, что противоречит их физическому смыслу. В этом случае целесообразно использовать для идентификации параметров методы условной оптимизации, например метод комплексов [5]. Этот метод относится к методам прямого поиска и сходится значительно медленнее, чем градиентные методы, но практически всегда позволяет получить удовлетворительные результаты. В случае, если и методом комплексов не удается определить параметры модели дуги с требуемой точностью, то это значит, что либо необходимо более тщательно провести эксперимент, для того чтобы получить незашумленные данные, либо следует сделать вывод о том, что модель, для которой определяются параметры, неадекватно описывает поведение дуги, то есть необходимо перейти к другой модели дуги, а процедуру идентификации начать сначала.

Существенным моментом при решении задачи определения параметров модели электрической дуги является то, что, как правило, эти параметры различаются по величине на несколько порядков. Например, постоянная времени дуги имеет величину порядка 10^{-3} с, а величина теплоотвода от единицы длины ствола дуги – порядка 10^{6} Вт/м. В приведенном примере любое вычисление целевой функции для движения к минимуму фактически не будет учитывать значения второй величины. Для того чтобы в процессе оптимизации равноправно участвовали обе переменные, необходимо их перемасштабировать [10], то есть изменить единицы их измерения. Например, если изменить единицы измерения постоянной времени на миллисекунды, а величины теплоотвода от единицы длины ствола дуги – на МВт/м, то обе переменные будут изменяться в процессе оптимизации равномерно. В общем виде это соответствует замене независимых переменных x на новые переменные $\hat{x}$:

$$\hat{x} = \left\| M \right\| \cdot x\ , \tag{5}$$

где $\left\| M \right\|$ – диагональная матрица масштабирования.

Для рассматриваемого примера матрица масштабирования будет иметь следующий вид:

$$\left\| M \right\| = \begin{Vmatrix} 10^3 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{Vmatrix} .$$

Фактически перемасштабирование переменных должно быть направлено на то, чтобы плохо обусловленную систему уравнений сделать хорошо обусловленной. В хорошо обусловленной системе уравнений определитель матрицы коэффициентов системы, составленной по методу наименьших квадратов, близок к единице. Поэтому и масштабы переменных необходимо выбирать таким образом, чтобы добиться наибольшей степени обусловленности системы уравнений.

Рассмотрим работоспособность предлагаемой методики на конкретных примерах. Для этого определим параметры модели дуги с изменяющимися геометрическими размерами. Исходными данными для этого будут служить экспериментально полученные осциллограммы коммутации цепи. Для модели дуги с изменяющимися геометрическими размерами, кроме зависимостей тока и напряжения дуги от времени, использовались также зависимости длины дуги от времени, полученные в результате скоростной киносъемки или расчетным путем. Погрешность определения параметров модели дуги оценивалась путем сравнения исходных осциллограмм коммутации цепи с расчетными.

Рассмотрим методику определения параметров модели с изменяющейся длиной [1]:

$$\frac{1}{g}\frac{dg}{dt} = \frac{P_o}{Q_o}\frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{S}}\left(\frac{UI}{P_o l\sqrt{4\pi S}} - 1\right) - \frac{1}{l}\frac{dl}{dt}\left(1 + \ln\frac{gl}{\sigma_o S}\right) . \qquad (6)$$

Модель дуги с изменяющейся длиной содержит три неизвестных параметра. Это величина теплоотвода от единицы поверхности дуги P_o, Вт/м^2; количество тепла, при выносе которого из единицы объема столба (или подводе к столбу) удельная проводимость дуги изменяется в e = 2.7 раза, – Q_o, Дж/м^3; коэффициент σ_o, имеющий размерность удельной проводимости, См/м. Все три параметра P_o, Q_o, σ_o, входящие в модель (12), определяются по результатам эксперимента.

Целевая функция суммы квадратов невязок для этой модели имеет следующий вид:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{U_i I_i}{l_i S Q_o} - \frac{P_o}{Q_o}\sqrt{\frac{4\pi}{S}} + \frac{1}{l_i}\frac{dl_i}{dt}\ln\sigma_o - \frac{1}{g_i}\frac{dg_i}{dt} - \frac{1}{l_i}\frac{dl_i}{dt}\left(1 + \ln\frac{g_i l_i}{S}\right)\right]^2 . \qquad (7)$$

В качестве исходных данных используем результаты эксперимента, приведенные в известной монографии О.Б. Брона [12, с. 34-39]. В этом эксперименте дуга горела на закругленных медных электродах, один из которых перемещался со скоростью от 1,5 до 10 м/с. В процессе горения дуги с помощью осциллографа фиксировались ток и напряжение дуги, а также производилась скоростная киносъемка. Зависимости тока, напряжения и длины дуги от времени, полученные опытным путем, приведены на рис. 1.

Линеаризацию по параметрам функции (7) произведем путем следующей подстановки:

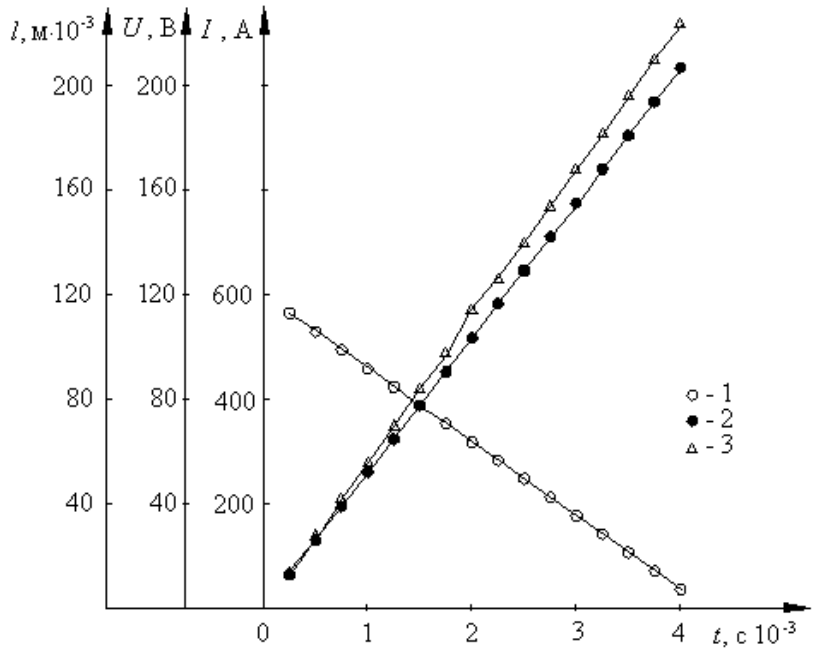

Рис. 1. Зависимости тока, напряжения и длины дуги от времени для скорости разведения контактов v = 5.6 м/с [12]: 1 – ток, 2 – напряжение, 3 – длина дуги

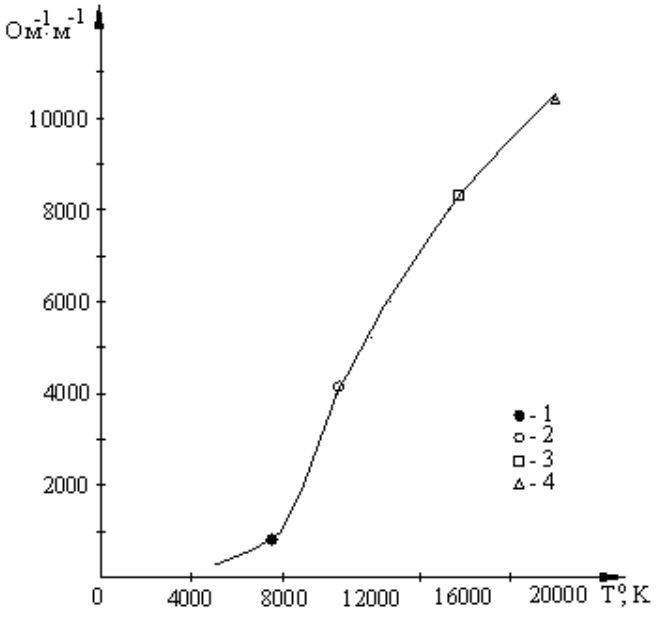

Рис. 2. Зависимость удельной электрической проводимости равновесной плазмы воздуха при атмосферном давлении [13] (сплошная линия):
1 – S = 0.0005 м^2; 2 – S = 0.0001 м^2; 3 – S = 0.00005 м^2; 4 – S = 0.0004 м^2 (см. таблицу)

$$E_1=1/Q_o\ ,\ E_2=P_o/Q_o\ ,\ E_3=\ln\sigma_o\ . \qquad (8)$$

С учетом соотношений (8) функция (7) примет вид

$$\Phi=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{U_i I_i}{l_i S}E_1-\sqrt{\frac{4\pi}{S}}E_2+\frac{1}{l_i}\frac{dl_i}{dt}E_3-\frac{1}{g_i}\frac{dg_i}{dt}-\frac{1}{l_i}\frac{dl_i}{dt}\left(1+\ln\frac{g_i l_i}{S}\right)\right]^2, \qquad (9)$$

где E_1, E_2, E_3 – новые параметры модели; n – число наблюдений в выборке.

Тогда нормальная система уравнений по методу наименьших квадратов для функции (9) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}&E_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{U_i I_i}{l_i S}\right)^2-E_2\sum_{i=1}^{n}\frac{U_i I_i}{l_i S}\sqrt{\frac{4\pi}{S}}+E_3\sum_{i=1}^{n}\frac{U_i I_i}{l_i^2 S}\frac{dl_i}{dt}=\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{U_i I_i}{l_i S}\left[\frac{1}{g_i}\frac{dg_i}{dt}+\frac{1}{l_i}\frac{dl_i}{dt}\left(1+\ln\frac{g_i l_i}{S}\right)\right]\end{aligned}, \qquad (10)$$

$$\begin{aligned}&-E_1\sum_{i=1}^{n}\frac{U_i I_i}{l_i}\sqrt{\frac{4\pi}{S}}-E_2\frac{4\pi n}{S}-E_3\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{l_i}\frac{dl_i}{dt}\sqrt{\frac{4\pi}{S}}=\\&=-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{g_i}\frac{dg_i}{dt}+\frac{1}{l_i}\frac{dl_i}{dt}\left(1+\ln\frac{g_i l_i}{S}\right)\right]\sqrt{\frac{4\pi}{S}}\end{aligned}, \qquad (11)$$

$$\begin{aligned}&E_1\sum_{i=1}^{n}\frac{U_i I_i}{l_i^2 S}\frac{dl_i}{dt}-E_2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{l_i}\frac{dl_i}{dt}\sqrt{\frac{4\pi}{S}}+E_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{l_i}\frac{dl_i}{dt}\right)^2=\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{l_i}\frac{dl_i}{dt}\left[\frac{1}{g_i}\frac{dg_i}{dt}+\frac{1}{l_i}\frac{dl_i}{dt}\left(1+\ln\frac{g_i l_i}{S}\right)\right]\end{aligned}. \qquad (12)$$

Из системы уравнений (10), (11), (12) определяются неизвестные E_1, E_2, E_3, а затем из соотношений (8) находятся интегральные оценки параметров модели (7) Q_o, P_o, σ_o. Параметры определялись по выборке из 16 наблюдений, взятых с зависимостей тока, напряжения и длины дуги от времени, приведенных на рис. 1, и различных величинах сечения дуги S. Полученные значения параметров модели дуги с изменяющейся длиной приведены в таблице. Погрешность воспроизведенных с использованием этих параметров тока и напряжения лежит в пределах (0.5÷27.5) %.

Значения параметров дуги

Параметр	Площадь поперечного сечения дуги S, м^2			
	0.0005	0.0001	0.00005	0.00004
P_o, Вт/м^2	4933601	11031850	15601410	17442920
Q_o, Дж/м^3	2732967	13664780	27329590	34162010
σ_o, 1/Ом·м	833.2	4166.1	8332.2	10415.4

Сравним величину параметра σ_o, имеющего размерность удельной проводимости и полученного расчетным путем, с литературными данными. На рис. 2 приведе-

на зависимость удельной проводимости дуги, горящей в воздухе, от температуры [13]. Здесь же нанесены значения параметра σ_o, взятые из таблицы.

Определим площадь поперечного сечения дуги, используя формулу для вычисления диаметра дуги [12]

$$d = 0.0008 \cdot \sqrt{\frac{I}{v}} = 0.0008 \cdot \sqrt{\frac{600}{5.6}} = 0.008 \ .$$

Здесь ток дуги I = 600 А, скорость растяжения дуги v = 5.6 м/с, диаметр дуги d = 0.008 м. Тогда площадь поперечного сечения дуги будет

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3.14 \cdot 0.008^2}{4} = 0.00005 \quad , \text{м}^2 .$$

Для сечения дуги S = 0.00005 м^2 , расчетным путем получено значение удельной электропроводности σ_o = 8332.2 1/Ом·м. На рис. 2 значение этой проводимости обозначено точкой 3, которой соответствует температура дуги ~ 16000 К. Из приведенных расчетов видно, что полученные расчетным путем по модели с изменяющейся длиной (12) параметры дуги имеют физический смысл и хорошо совпадают с литературными данными.

Выводы

1. Разработана методика определения параметров математических моделей дуги, которая использует в качестве исходных данных зависимости тока и напряжения дуги от времени, полученные в результате обычных эксплуатационных испытаний. Работоспособность методики продемонстрирована на трехпараметрической модели дуги с изменяющейся длиной.

2. Показано, что при решении задачи идентификации параметров моделей электрической дуги эффективно использование методов нелинейной оптимизации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Воронин А.А., Кулаков П.А.* Математическая модель электрической дуги // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки, 2012. – № 4 (36). – С. 155-162.
2. *Ханиш, Кюнхард, Менке и др.* Математическое моделирование дуги отключения при разработке выключателей с газовым дутьем // Электрические машины. Выключатели высокого напряжения. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – С. 187-197.
3. *Воронин А.А., Кулаков П.А., Новиков О.Я.* Идентификация и устойчивость электрической дуги // III Всесоюзная научно-техническая конференция. Проблемы нелинейной электротехники. Тез. докл. – Киев, 1988. – Ч. 3. – С. 86-88.
4. *Бард Й.* Нелинейное оценивание параметров. – М.: Статистика, 1979. – 349 с.
5. *Реклейтис Г., Рейвидран А., Рэгсдел К.* Оптимизация в технике. – М.: Мир, 1986. – Кн. 1. – 349 с.
6. Математические методы исследования динамики и проблемы управления низкотемпературной плазмой / Новиков О.Я., Путько В.Ф., Танаев В.В., Воронин А.А. и др. // Низкотемпературная плазма. Т. 2. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1991. – 257 с.
7. *Химмельблау Д.* Анализ процессов статистическими методами. – М.: Мир, 1973. – 957 с.
8. *Загускин В.Л.* Численные методы решения плохо обусловленных задач. – Ростов-нД: Рост. университет, 1976. – 187 с.
9. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
10. *Дэннис Дж.-мл., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1986. – 440 с.
11. *Mayr O.* Beiträge zur Theorie des statschen und des dynamischen Lichtbogens // Arch. Elektrotechn. – 1943. – Bd. 37, № 12. – S. 588-608.

12. *Брон О.Б.* Электрическая дуга в аппаратах управления. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1954. – 532 с.
13. *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 592 с.

Статья поступила в редакцию 24 декабря 2012 г.

DEVELOPMENT OF DETERMINATION METHODS OF PARAMETERS IN ELECTRIC ARC MODELS

A.A. Voronin, P.A. Kulakov

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

Determination methods of the parameters in electric arc off models are given according to the results of the passive experiment applicable to a wide class of integral arc models.

Keywords: *an electric arc, integrated dynamic models of an electric arc, methods for determining the parameters of the models of electric arc.*

Alexander A. Voronin (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.
Pavel A. Kulakov (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.