УДК 621.315.01

АППРОКСИМАЦИЯ ОБЪЕКТОВ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТИПОВЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ЗВЕНЬЯМИ

В.И. Котенев, А.В. Котенев, В.С. Осипов, В.В. Кочетков

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентная одномерному уравнению нестационарной теплопроводности с граничными условиями первого рода, ориентированная на решение задач управления сложными объектами. Дана сравнительная оценка погрешности решений задачи аппроксимации различными методами при разбиении нагреваемого тела на небольшое число частей.

Ключевые слова: *уравнение теплопроводности, система управления температурой, аппроксимация, уравнения в частных производных, метод интегральных элементов.*

Совместное рассмотрение обыкновенных уравнений и уравнений в частных производных с целью, например, построения моделей объектов управления при конструировании рациональных систем управления технологическими установками [2, 4, 5] представляет известные трудности. Обычно эта проблема решается с помощью аппроксимации уравнений в частных производных обыкновенными уравнениями. Причем в сложных объектах, описываемых уравнениями высокого порядка, актуальной становится проблема аппроксимации уравнений в частных производных системой обыкновенных дифференциальных уравнений низкого порядка.

В данной работе на примере теплообмена неограниченной пластины

$$\frac{\partial\theta(x,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial\theta^2(x,\tau)}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

$$x\in[0,1]\ ,\ t\in[0,\infty],\ x=X/X_{\text{м}}\ ,\ \tau=at/X_{\text{м}}^2$$

с граничными условиями первого рода

$$\frac{\partial\theta(0,\tau)}{\partial x}=0\,;\ \theta(1,\tau)=\theta_{\text{c}}\ ;\ \theta(x,0)=0 \qquad (2)$$

рассматривается применение для этих целей метода интегральных элементов (МИЭ) [3] с нелинейной двухточечной координатной функцией.

Исходное уравнение (1) в МИЭ заменяется конечным числом уравнений

$$\frac{\partial\theta_i(x,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial_i^2\theta(x,\tau)}{\partial x^2}\ ;\ i=1,2,\ldots,n \qquad (3)$$

в соответствии с разбиением отрезка пространственной координаты x.

Виктор Иванович Котенев (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Электроснабжение промышленных предприятий».

Александр Викторович Котенев (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Электроснабжение промышленных предприятий».

Вячеслав Семенович Осипов (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Электроснабжение промышленных предприятий».

Владимир Валерьевич Кочетков, студент.

МИЭ позволяет получить избыточное число уравнений в системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). При этом уравнение (3) интегрируют один или два раза:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial \theta_i(x,\tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \theta(x,\tau)}{\partial x^2} \right) dx;$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx_s \int_{x_i}^{x_s} \left(\frac{\partial \theta_i(x,\tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \theta(x,\tau)}{\partial x^2} \right) dx.$$

В результате этого получают:

$$\frac{d}{d\tau} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \theta_i(x,\tau)\,dx = \frac{\partial \theta_i(x_{i+1},\tau)}{\partial x} - \frac{\partial \theta_i(x_i,\tau)}{\partial x}; \qquad (4)$$

$$\frac{d}{d\tau} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx_s \int_{x_i}^{x_s} \theta_i(x,\tau)\,dx = \theta_{i+1} - \theta_i - \frac{\partial \theta_i(x_i,\tau)}{\partial x} \Delta x_i. \qquad (5)$$

Выбираются координатные функции в виде [3]

$$\theta_{i-1}(x,\tau) = b_i \left[\left(\theta_i(\tau) - \theta_{i-1}(\tau) \right) x^m - \theta_i(\tau) x_{i-1}^m + \theta_{i-1}(\tau) x_i^m \right]; \qquad (6)$$

$$\overline{\theta}_i(x,\tau) = d_i \left[\left(\theta_{i+1}(\tau) - \theta_i(\tau) \right) x^m - \theta_{i+1}(\tau) x_i^m + \theta_i(\tau) x_{i+1}^m \right]; \qquad (7)$$

$$\overline{\theta}_{i+1}(x,\tau) = e_i \left[\left(\theta_{i+2}(\tau) - \theta_{i+1}(\tau) \right) x^m - \theta_{i+2}(\tau) x_{i+1}^m + \theta_{i+1}(\tau) x_{i+2}^m \right], \qquad (8)$$

где $b_i = \left(x_i^m - x_{i-1}^m \right)^{-1}$; $d_i = \left(x_{i+1}^m - x_i^m \right)^{-1}$; $e_i = \left(x_{i+2}^m - x_{i+1}^m \right)^{-1}$; $m \in R$.

Затем в левые части уравнений (4), (5) подставляют вместо $\theta_i(x,\tau)$ аппроксимирующую функцию $\overline{\theta}_i(x,\tau)$ согласно (7), а в правые части уравнений (4), (5) вместо производных – выражения для внешних граничных условий при $i = 1, n$ (за исключением граничных условий первого рода), а при $i = 2,3,...,n-1$ межэлементные граничные условия:

$$\frac{\partial \theta_i(x_i,\tau)}{\partial x} = \frac{\partial}{2\partial x} \left(\overline{\theta}_{i-1}(x_i,\tau) + \overline{\theta}_i(x_i,\tau) \right);$$

$$\frac{\partial \theta_i(x_{i+1},\tau)}{\partial x} = \frac{\partial}{2\partial x} \left(\overline{\theta}_i(x_{i+1},\tau) + \overline{\theta}_{i+1}(x_{i+1},\tau) \right).$$

В результате этого из интегро-дифференциального уравнения первого порядка (ИДУ1) (4) получена первая система ОДУ:

$$b_{11}^{(1)} \frac{d\theta_1}{d\tau} + b_{21}^{(1)} \frac{d\theta_2}{d\tau} = c_{21} \left(-d_1\theta_1 + (d_1 - e_1)\theta_2 + e_1\theta_3 \right) - \frac{\partial \theta(x_1,\tau)}{\partial x}; \qquad (9)$$

$$i = 2,3,...,n-1;$$

$$\begin{aligned} b_{1i}^{(1)} \frac{d\theta_i}{d\tau} + b_{2i}^{(1)} \frac{d\theta_{i+1}}{d\tau} &= b_i c_{1i} \theta_{i-1} - \left[d_i c_{2i} + c_{1i}(b_i - d_i) \right] \theta_i + \\ &+ \left[c_{2i}(d_i - e_i) - c_{1i} d_i \right] \theta_{i+1} + c_{2i} e_i \theta_{i+2}; \end{aligned} \qquad (10)$$

$$b_{1n}^{(1)}\frac{d\theta_n}{d\tau}+b_{2n}^{(1)}\frac{d\theta_{n+1}}{d\tau}=c_{1n}\left[b_n\theta_{n-1}-\left(b_n-d_n\right)\theta_n+d_n\theta_{n+1}+\frac{\partial\theta\left(x_{n+1},\tau\right)}{\partial x}\right], \tag{11}$$

где $b_{1i}^{(1)}=d_i\left(x_{i+1}^m\Delta x_i-d_{1i}\right)$; $b_{2i}^{(1)}=-d_i\left(x_i^m\Delta x_i-d_{1i}\right)$; $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$; $d_{1i}=\dfrac{x_{i+1}^{m+1}-x_i^{m+1}}{m+1}$;

$c_{1i}=\dfrac{1}{2}mx_i^{m-1}$; $c_{2i}=\dfrac{1}{2}mx_{i+1}^{m-1}$; $c_{1n}=\dfrac{mx_n^{m-1}}{2}$; $c_{21}=\dfrac{mx_2^{m-1}}{2}$; $i=1,2,...,n$.

Системе уравнений (9) – (11) соответствует система операторных уравнений следующего вида:

$$\upsilon_1(p)=\left(T_{11}p+1\right)^{-1}\left[\left(k_{21}-T_{21}p\right)\upsilon_2(p)+k_{31}\upsilon_3(p)\right];$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\upsilon_i(p)=\left(T_{ii}p+1\right)^{-1}\left[k_{i-1,i}\upsilon_{i-1}(p)+\left(k_{i+1,i}-T_{i+1,i}p\right)\upsilon_{i+1}(p)+k_{i+1,i}\upsilon_{i+2}(p)\right]; \tag{12}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\upsilon_n(p)=\left(T_{nn}p+1\right)^{-1}\left[k_{n-1,n}\upsilon_{n-1}(p)+k_{n+1,n}\upsilon_c(p)\right];$$

где $T_{11}=\dfrac{b_{11}^{(1)}}{c_{31}}$; $T_{21}=\dfrac{b_{21}^{(1)}}{c_{31}}$; $k_{21}=\dfrac{d_1-c_1}{d_1}$; $k_{31}=\dfrac{e_1}{d_1}$; $T_{1i}=\dfrac{b_{1i}^{(1)}}{c_{3i}}$; $T_{2i}=\dfrac{b_{2i}^{(1)}}{c_{3i}}$; $k_{i-1,i}=\dfrac{b_{1i}^{(1)}c_{1i}}{c_{3i}}$;

$k_{i+1,i}=\dfrac{c_{2i}\left(d_i-e_i\right)-c_{1i}d_i}{c_{3i}}$; $k_{i+2,i}=\dfrac{c_{2i}e_i}{c_{3i}}$; $T_{1n}=\dfrac{b_{1n}^{(1)}}{c_{1n}\left(b_n-d_n\right)}$; $T_{2n}=\dfrac{b_{2n}^{(1)}}{c_{1n}\left(b_n-d_n\right)}$;

$k_{n-1,n}=\dfrac{b_n}{b_n-d_n}$; $k_{n+1,n}=\dfrac{d_n}{b_n-d_n}$.

Вторую систему ОДУ можно получить из интегро-дифференциального уравнения второго порядка (ИДУ2) (5):

$$b_{11}^{(2)}\frac{d\theta_1}{d\tau}+b_{21}^{(2)}\frac{d\theta_2}{d\tau}=-\theta_1+\theta_2-\Delta x_2\frac{\partial\theta\left(x_1,\tau\right)}{\partial x}; \tag{13}$$

$$b_{1i}^{(2)}\frac{d\theta_i}{d\tau}+b_{2i}^{(2)}\frac{d\theta_{i+1}}{d\tau}=c_{1i}b_i\Delta x_i\theta_{i-1}-a_{5i}\theta_i+\left(1-c_{1i}d_i\Delta x_i\right)\theta_{i+1}, \tag{14}$$

где

$$b_{1i}^{(2)}=d_i\left(a_{1i}-d_{2i}+a_{2i}x_{i+1}^m\right);\; b_{2i}^{(2)}=d_i\left(a_{3i}+d_{2i}-a_{2i}x_i^m\right);\; d_{2i}=\frac{x_{i+1}^{m+2}-x_i^{m+2}}{(m+1)(m+2)};$$

$$a_{1i}=\Delta x_i x_i\left(\frac{x_i^m}{m+1}-x_{i+1}^m\right);\; a_{2i}=\frac{1}{2}\left(x_{i+1}^2-x_i^2\right);\; a_{3i}=\frac{mx_i^{m+1}\Delta x_i}{m+1};\; a_{4i}=c_{1i}\Delta x_i;$$

$$a_{5i}=1+a_{4i}\left(b_i-d_i\right);\; i=1,2,...,n.$$

Из совместного рассмотрения двух систем ОДУ (9 – 11), (13) и (14) несложно перейти к системе ОДУ, записанной в нормальной форме, что широко используется в современной теории автоматического управления.

После несложных преобразований системы уравнений (13), (14) можно получить вторую систему операторных уравнений:

$$\upsilon_1(p)=(T_{11}p+1)^{-1}(1-T_{21}p)\upsilon_2(p);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\upsilon_i(p)=(T_{1i}p+1)^{-1}\left[k_{1i}\upsilon_{i-1}(p)+k_{2i}(1-T_{2i}p)\upsilon_{i+1}(p)\right]; \tag{15}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\upsilon_n(p)=(T_{1n}p+1)^{-1}\left[k_{1n}\upsilon_{n-1}(p)+k_{2n}\upsilon_c(p)\right],$$

где

$$\upsilon_i(p)=\theta_i(p)/\theta_c\ ;\ k_{1i}=\frac{a_{4i}b_i}{a_{5i}}\ ;\ k_{2i}=\frac{1-a_{4i}d_i}{a_{5i}}\ ;\ T_{1i}=\frac{b_{1i}^{(2)}}{a_{5i}};\ T_{2i}=\frac{b_{2i}^{(2)}}{1-a_{4i}d_i}\ ;\ i=1,2,\ldots,n\,.$$

Система операторных уравнений метода конечных разностей [1] имеет вид

$$\upsilon_1(p)=W_1(p)\upsilon_2(p);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\upsilon_i(p)=W_i(p)\left(\upsilon_{i-1}(p)+\upsilon_{i+1}(p)\right); \tag{16}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\upsilon_n(p)=W_n'(p)\upsilon_c(p)+W_n(p)\upsilon_{n-1}(p),$$

где

$$W_1(p)=\frac{1-\dfrac{1}{12n^2}p}{1+\dfrac{5}{12n^2}p}\ ;\ W_n'(p)=\frac{1}{2\left(1+\dfrac{5}{12n^2}p\right)}\ ;\ W_i(p)=\frac{1-\dfrac{1}{12n^2}p}{2\left(1+\dfrac{5}{12n^2}p\right)}\ ;\ i=2,3,\ldots,n\,.$$

Системы уравнений (12), (15) и (16) были использованы при составлении расчетных схем в программном комплексе Simulink-Matlab для построения переходных характеристик при изменении температуры греющей среды.

Погрешность

$$\Delta\upsilon^{(\varepsilon)}(0,5;\tau)=\Delta\upsilon^{(0)}(0,5;\tau)\left(\frac{1}{2^m}\upsilon_c(\tau)+\frac{2^m-1}{2^m}\upsilon_1^{(\varepsilon)}(\tau)\right),\ \varepsilon=1;2 \tag{17}$$

различных методов при одноэлементной аппроксимации $n=1$ и $x=0,5$ представлены на рис. 1 кривыми $\Delta\upsilon^{(1)}(\tau)$, $\Delta\upsilon^{(2)}(\tau)$. В соотношении (17): $\upsilon^{(0)}$ – точное решение; $\varepsilon=1$ – МИЭ $m=2$; $\varepsilon=2$ – МКР.

Результаты вычислений $\upsilon_1(\tau)$, $\upsilon_2(\tau)$ при $m=1$ и $m=2$ представлены на рис. 2, 3, из анализа которых следует, что погрешность вычислений с помощью МИЭ имеет незначительную величину уже при $n=4$.

В таблицу сведены результаты вычислений относительной температуры в середине пластины $\upsilon_1=\theta(0,\tau)/\theta_c$ и $\upsilon_2=\theta(0,5,\tau)/\theta_c$ при двухэлементной аппроксимации различными методами: $\upsilon^{(0)}$ – точное решение; $\upsilon^{(1)}$ – МКЭ. Остальные величины υ относятся к МИЭ: $\upsilon^{(2)}$ – $m=1$, первое уравнение – ИДУ1, второе – ИДУ2; $\upsilon^{(3)}$ – $m=2$ – ИДУ1, ИДУ2; $\upsilon^{(4)}$ – $m=2$ – оба уравнения ИДУ2.

Анализ погрешности

$$\delta^{(i)} = \frac{1}{2}\left(\delta_1^{(i)} + \delta_2^{(i)}\right)100\% = \frac{1}{2k}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\upsilon_1^{(0)}\left(\tau_j\right) - \upsilon_1^{(i)}\left(\tau_j\right)}{\upsilon_1^{(0)}\left(\tau_j\right)} + \sum_{j=1}^{k}\frac{\upsilon_2^{(0)}\left(\tau_j\right) - \upsilon_2^{(i)}\left(\tau_j\right)}{\upsilon_2^{(0)}\left(\tau_j\right)}\right)100\%$$

(см. таблицу) показывает, что погрешность МИЭ при $m=1$ и $m=2$ с ИДУ1 и ИДУ2 меньше погрешности МКЭ. Погрешности МИЭ при $m=2$ с двумя ИДУ2 и МКЭ соизмеримы по величине: $\delta_1^{(1)} = 9{,}15\%$, $\delta^{(4)} = 10{,}95\%$.

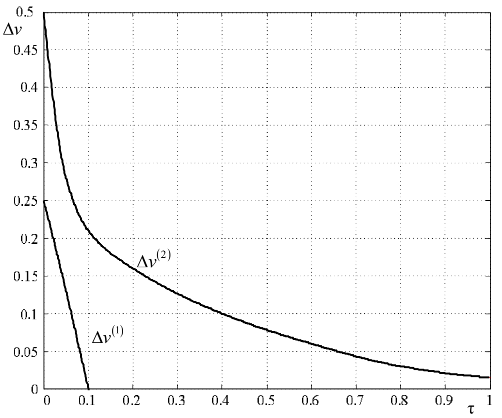

Рис. 1. Зависимость погрешности решений различными методами:
$\Delta\upsilon^{(1)}$ – МИЭ; $\Delta\upsilon^{(2)}$ – МКР

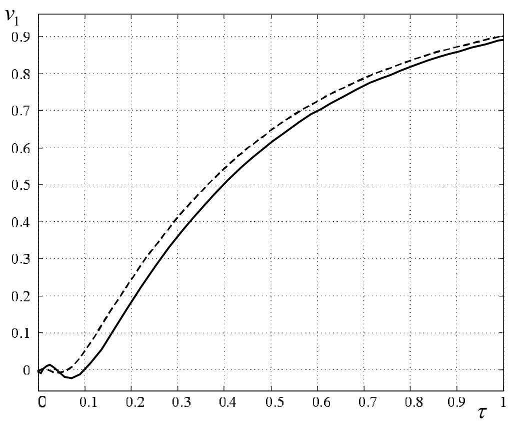

Рис. 2. Зависимость относительной температуры в центре пластины от τ при $n=4$ для $m=1$ (сплошная линия) и $m=2$ (пунктирная линия)

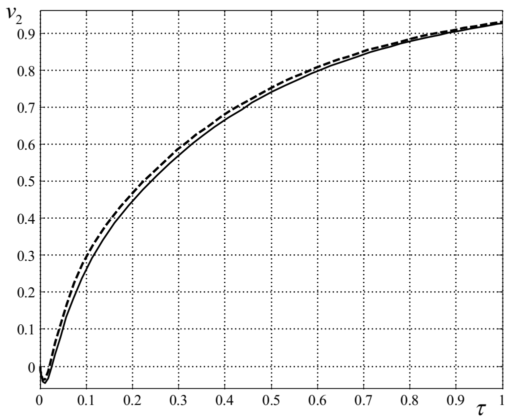

Рис. 3. Зависимость относительной температуры в пластине при $x=0{,}5$ от τ при $n=4$ для $m=1$ (сплошная линия) и $m=2$ (пунктирная линия)КЗ

Результаты вычислений температуры пластины

Время τ	Значения относительной температуры									
	$\upsilon_1^{(0)}$	$\upsilon_1^{(1)}$	$\upsilon_1^{(2)}$	$\upsilon_1^{(3)}$	$\upsilon_1^{(4)}$	$\upsilon_2^{(0)}$	$\upsilon_2^{(1)}$	$\upsilon_2^{(2)}$	$\upsilon_2^{(3)}$	$\upsilon_2^{(4)}$
0,01	0,000	-0,023	-0,015	-0,01	-0,009	0,047	0,062	0,056	0,067	-0,066
0,1	0,051	0,083	0,052	0,100	0,112	0,270	0,335	0,350	0,358	0,36
0,2	0,228	0,287	0,235	0,282	0,305	0,442	0,490	0,512	0,504	0,514

Время τ	Значения относительной температуры									
	$\upsilon_1^{(0)}$	$\upsilon_1^{(1)}$	$\upsilon_1^{(2)}$	$\upsilon_1^{(3)}$	$\upsilon_1^{(4)}$	$\upsilon_2^{(0)}$	$\upsilon_2^{(1)}$	$\upsilon_2^{(2)}$	$\upsilon_2^{(3)}$	$\upsilon_2^{(4)}$
0,4	0,526	0,576	0,524	0,560	0,583	0,667	0,698	0,705	0,694	0,710
0,6	0,710	0,748	0,712	0,725	0,750	0,794	0,821	0,819	0,81	0,826
0,8	0,823	0,850	0,824	0,830	0,850	0,872	0,893	0,89	0,882	0,900
1,0	0,892	0,910	0,892	0,894	0,910	0,920	0,937	0,932	0,927	0,937
1,6	0,976	0,981	0,975	0,975	0,980	0,982	0,987	0,984	0,983	0,987
$\delta^{(i)} = \frac{1}{2}\left(\delta_1^{(i)} + \delta_2^{(i)}\right)100\%$			$\delta^{(1)} = 9{,}15\%$		$\delta^{(2)} = 4{,}9\%$	$\delta^{(3)} = 7{,}6\%$		$\delta^{(4)} = 10{,}95\%$		$\delta^{(5)} = 4{,}75\%$

Выводы. Получены две системы ОДУ, аппроксимирующие уравнение нестационарной теплопроводности пластины с граничными условиями первого рода, по которым построены расчетные схемы и дана сравнительная оценка с МКЭ погрешности одно- и двухэлементной аппроксимации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Зарубин В.С.* Инженерные методы решения задач теплопроводности. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 326 с.
2. *Котенев В.В., Котенев В.И.* Математическая модель диска газотурбинного двигателя при управления термоциклическими нагружениями на стенде // Электротехника. – 2008. – № 8. – С. 62-64.
3. *Котенев В.И.* Приближенный метод решения задач нестационарной теплопроводности // Известия Академии наук СССР. Энергетика и транспорт. – 1989. – № 3. – С. 111-116.
4. *Котенев В.И.* Математическая модель протяжной печи на воздушной подушке // Известия вузов. Черная металлургия. – 1990. – № 5. – С. 72-74.
5. *Котенев В.И.* Система автоматического управления термоциклическими испытаниями диска газотурбинного двигателя // Известия вузов. Черная металлургия. – 2000. – № 5. – С. 40-42.

Статья поступила в редакцию 30 декабря 2012 г.

APPROXIMATION OF THE OBJECTS WITH NONSTATIONARY THERMAL CONDUCTIVITY WITH THE ELEMENTARY DYNAMIC UNITS

V.I. Kotenev, A.V. Kotenev, V.S. Osipov, V.V. Kochetkov

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The system of ordinary differential equations equivalent to one-dimensional thermal conductivity equation with boundary conditions of the first kind is derived which is oriented to solve the tasks in the field of complex systems control. Comparative appraisal of the accuracy of the approximation task solutions is given for the different methods applied with few elements partition of the heated body.

Keywords: *thermal conductivity equation, temperature control system, approximation, partial differential equations, integral elements method.*

Viktor I. Kotenev (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.
Alexander V. Kotenev (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.
Vyacheslav S. Osipov (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.
Vladimir V. Kochetkov, Student.