

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЗАВОДНЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВЕЙЕРШТРАССА\*

*А.Е. Касаткин*

Самарский государственный университет  
443011, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1  
E-mail: darantion\_yar@mail.ru

*Заводнение является вторичным методом добычи нефти и обеспечивает высокие уровни нефтеотдачи за счет закачки в нефтеносный пласт воды, вытесняющей нефть. Актуальными являются задачи повышения эффективности заводнения, в том числе за счет оптимального подбора схемы расстановки добывающих скважин и нагнетательных, заполняющих горную породу вытесняющим агентом. В настоящей работе предлагается программно реализованный метод количественной и качественной оценки т.н. моделей заводнения: при этом воображаемое месторождение моделируется однородным бесконечным плоским пластом, покрытым двоякопериодической решеткой с добывающими и нагнетательными скважинами в ячейках, а скорость фильтрации описывается с помощью дзета-функции Вейерштрасса.*

**Ключевые слова:** заводнение, двоякопериодическая решетка, дзета-функция Вейерштрасса, водонефтяной контакт, обводнение скважин, коэффициент извлечения нефти.

### Введение

Вторичные интенсивные методы добычи нефти в настоящее время остаются наиболее перспективным средством развития нефтяной промышленности: их высокая эффективность связана в первую очередь с нагнетанием в нефтеносный пласт т. н. вытесняющих агентов, вытесняющих нефть из породы. Исторически первым вторичным методом, случайно открытым в середине 1860-х гг. [1], стало заводнение: рабочими штата Пенсильвания было установлено, что вода, нагнетаемая извне, способна восстановить упавшее пластовое давление. Новая технология была испытана также на территории нескольких других штатов в первой половине XX в. и в настоящее время обеспечивает 50 % добываемой США нефти [1].

Прогнозирование хода заводнения, создание программного комплекса для количественной и качественной оценки схем расстановки скважин – цель настоящего исследования.

Соответствующая ей задача заключалась в разработке программного средства для мониторинга границы водонефтяного контакта (ВНК), расширяющейся с течением времени. Работа программы предполагала получение качественных и количественных оценок эффективности схем заводнения. Результатами вычислений должны были стать наглядные картины движения воды (вытесняющего агента) с течением времени, а также значения некоторых количественных параметров (времени обводнения добывающих скважин, коэффициента извлечения нефти (КИН) и т.д.).

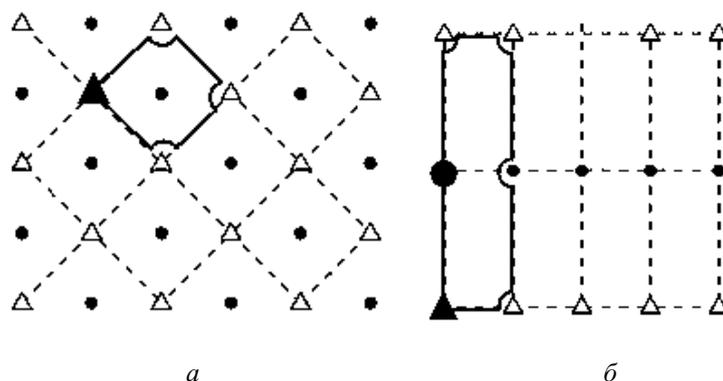
Для выполнения поставленной задачи требовалось построить модель нефтеносного пласта, а затем математически описать процессы фильтрации жидкостей в нем и распространения границы ВНК с течением времени.

---

\* Работа поддержана грантом РФФИ 13-01-97008-р\_поволжье\_а)  
Андрей Евгеньевич Касаткин, аспирант.

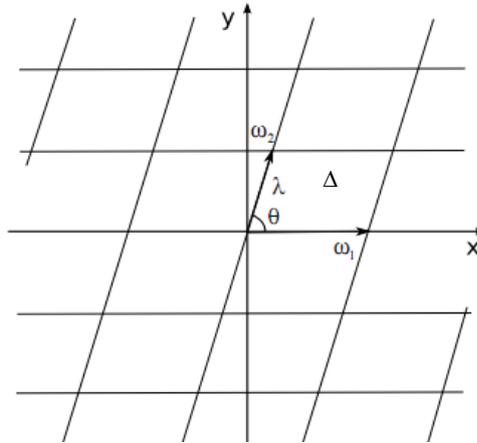
## Математическая модель

Построение модели нефтеносного пласта и выявление ее особенностей как области определения функции скорости – первый этап в представлении нефтяного месторождения, подверженного заводнению. Как известно [2], в нефтяной промышленности используются несколько вторичных методов добычи, разделяемых по разным признакам. В частности, выделяют рядные и площадные схемы заводнения, особенности которых определяют их применение на тех или иных участках разработки. Так, рядные модели обладают большей устойчивостью к отказам в работе скважин и оказывают более равномерное воздействие на месторождение, однако площадные, обладающие меньшей зоной охвата, учитывают больше деталей в строении пласта и позволяют распределить влияние заводнения по его (пласта) участкам наиболее рационально за счет своей «компактности». С развитием практики и теории нефтедобычи актуальными становятся вопросы повышения эффективности тех или иных методов: так, некоторыми авторами [3] предлагаются меры по повышению интенсивности разработки за счет видоизменения схем заводнения, что увеличивает их возможное число. Тем не менее можно выделить общее качество, объединяющее все виды этих моделей: независимо от их сложности и направленности при использовании всякой схемы расстановки скважин последние размещаются на месторождении в определенном порядке. Этот порядок обеспечивает периодичность во взаимном расположении скважин: при взгляде «сверху» пласт словно покрывается сеткой из ячеек – повторяющихся элементов у схем заводнения (рис. 1).



Р и с. 1. Пример площадной (а) и рядной (б) схем заводнения: добывающие скважины обозначены кружками, нагнетательные – треугольниками. Жирные контуры выделяют повторяющиеся элементы во взаимном расположении скважин – эти же элементы можно представить ячейками воображаемой решетки, покрывающей месторождение

Итак, после ознакомления с особенностями рассматриваемого метода нефтедобычи можно перейти к моделированию зоны разработки: в рамках настоящей задачи нефтесодержащий пласт представляется однородным, фиксированной толщины, имеющим вид плоскости в комплексных координатах, покрываемой сеткой из добывающих и нагнетательных скважин. Для описания последней (сетки) математический аппарат располагает специальным средством – это т. н. двоякопериодическая решетка [4, 5]. На рис. 2 показан фрагмент указанной структуры с выделенной ячейкой.



Р и с. 2. Фрагмент двоякопериодической решетки  $L$  канонической формы (одна из осей направлена вдоль  $Ox$ ). Типичная ячейка, образованная векторами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , имеет вид параллелограмма

Как видно из изображения, решетка  $L$  формируется набором узлов, образуемых векторами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . На рисунке представлен т. н. «канонический» случай, при котором  $\omega_1$  совпадает с горизонтальной осью, а  $\omega_2$  описывается следующим образом:  $\omega_2 = \lambda e^{i\theta}$ . Здесь  $\lambda$  представляет длину второго вектора  $\omega_2$ ,  $\theta$  – угол между  $\omega_2$  и осью  $Ox$ , а  $\Delta$  соответствует площади ячейки, имеющей вид параллелограмма. Отдельно следует указать вид узлов  $\omega$ , задающих решетку:  $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$  ( $m, n \in \mathbb{Z}$ ). Благодаря использованию  $L$  и бесконечности границ пласта область исследования может быть сужена до одной ячейки, процессы в которой дублируются в ее соседях. В то же время указанное свойство решетки накладывает определенное ограничение на поведение определяемых на ней функций, а именно – соблюдение двоякой периодичности.

Подобное выражение для скорости фильтрации было описано в работе [4, 5], в которой использовалась двоякопериодическая решетка с одиночной добывающей скважиной в ячейке. Соответствующая ей формула представлена ниже:

$$v(z, \bar{z}) = -\frac{Q}{2\pi h} (\zeta(z) + \alpha \bar{z} - \beta z). \quad (1)$$

Здесь  $\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right)$  – дзета-функция Вейерштрасса [4, 5];

$\beta = \frac{\pi}{\Delta}$  и  $\alpha = \frac{\beta \bar{\omega} - 2\zeta(\omega/2)}{\omega}$  – числовые параметры;  $\Delta$  – площадь ячейки;  $Q$  – мощность добывающей скважины;  $h$  – толщина пласта;  $\omega$  – узел решетки  $L$  ( $\omega = m\omega_1 + n\omega_2/m, n \in \mathbb{Z}$ ) [4, 5]. Важно отметить, что именно величины  $\alpha$  и  $\beta$  обеспечивают двоякопериодичность функции  $v(z, \bar{z})$ . Таким образом, выражение (1) может быть использовано для описания течения жидкости в открытом нефтеносном пласте толщины  $h$ , разрабатываемом системой добывающих скважин одинаковой мощности  $Q$ : последние располагаются в узлах покрывающей месторождение двоякопериодической решетки  $L$ . Линейный характер формулы (1) позволяет легко обобщить ее на случай размещения нескольких скважин в одной ячейке. Кроме того, рассматриваемое выражение для скорости  $v(z, \bar{z})$  также позволяет учесть направленность работы

скважин: добывающие отмечаются знаком «минус» перед соответствующим им слагаемым, нагнетательные – знаком «плюс». Формула (2) демонстрирует итоговый вид функции скорости, принятый в решаемой задаче после всех указанных модификаций выражения (1):

$$v(z, \bar{z}) = - \sum_{u=1}^{n_1} \frac{Q_u^{(prod)}}{2\pi} (\bar{\zeta}(z - z_u, \overline{z - z_u}) + a \overline{(z - z_u)} - \beta(z - z_u)) + \sum_{w=1}^{n_2} \frac{Q_w^{(inject)}}{2\pi} (\bar{\zeta}(z - z_w, \overline{z - z_w}) + a \overline{(z - z_w)} - \beta(z - z_w)). \quad (2)$$

Здесь  $n_1$  и  $n_2$  – число добывающих (мощности  $Q_u$ ) и нагнетательных (мощности  $Q_w$ ) скважин соответственно, размещенных в точках  $z_u$  и  $z_w$  ( $u$  и  $w$  – индексы сумм).

### Методика решения

В ходе рассуждений, описанных в предыдущем разделе, были сформированы компоненты общей модели, описывающей предмет исследования. С завершением подготовительного этапа решения можно приступить к следующей стадии – формулированию уравнений, способных представить движение границы ВНК. Весьма удобно представить фронт заводнения в виде совокупности точек, образованных кривыми течения нагнетаемой воды в определенный момент времени. Объединение линий тока жидкости, проникающей в пласт через ствол нагнетательной скважины, образует т. н. «водяное пятно», граница которого совпадает с границей водонефтяного контакта согласно «поршневой» модели вытеснения нефти [6]. Итоговая система уравнений, позволяющая определить кривые движения воды, а следовательно, и отследить распространение границы ВНК, представлена ниже:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} &= v(z); \\ z_{t=0} &= z_0 + r_w e^{i\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

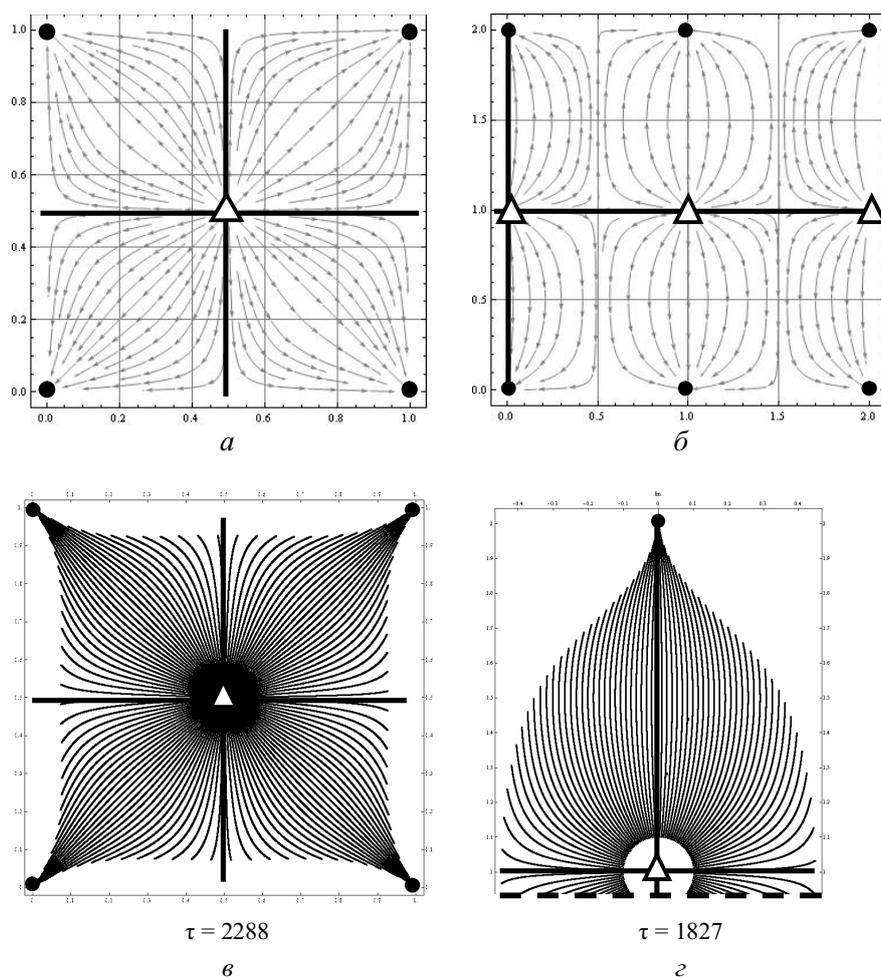
Здесь  $m$  – пористость пласта,  $z_0$  – центр призабойной зоны радиуса  $r_w$  нагнетательной скважины, сквозь которую в месторождение поступает вода. Выражение для  $v(z)$  совпадает с формулой (2). Угол  $\theta$  используется для построения кривых движения воды: изменяя значение  $\theta$  в диапазоне  $[0, 2\pi)$ , можно перемещаться вдоль края ствола нагнетательной скважины, от одной траектории течения к другой, а величина  $\Delta\theta$  определяет их (траекторий) суммарное число. Нарастив параметр  $\theta$  с шагом  $\Delta\theta$ , можно построить несколько решений задач Коши, аналогичных (3): объединение вычисляемых траекторий течения образует т. н. «водяное пятно», граница которого совпадает с границей ВНК в выбранный момент времени. В качестве переменной интегрирования удобно ввести т. н. безразмерное время  $\tau$ , связанное с реальным ( $t$ ) следующим соотношением:  $\tau = mQt / h |\omega_1^2|$ .

Для численного интегрирования системы (3) использовались методы Рунге – Кутты, измененные с учетом комплексной природы переменных, входящих в уравнения.

### Результаты

На рис. 3 представлен ряд картин фронта заводнения, полученных при обработке нескольких схем из рис. 1: круги соответствуют добывающим скважинам, а треугольники – нагнетательным. Для удобства местоположение «притоков» (нагнетательных скважин) дополнительно отмечено перекрестием черных сплошных линий.

На рисунке представлены картины течения закачиваемой в пласт воды, построенные для пятиточечной и однорядной линейной схем расстановки скважин. Первый ряд изображений демонстрирует движение линий тока, вдоль которых осуществлялось интегрирование; ниже расположены «снимки» «водяного пятна» для каждой схемы в момент прорыва воды в добывающие скважины. В довершение следует отметить качественное совпадение результатов как с итогами численных расчетов [7], так и с экспериментальными данными [8] других авторов, занятых решением схожих задач.



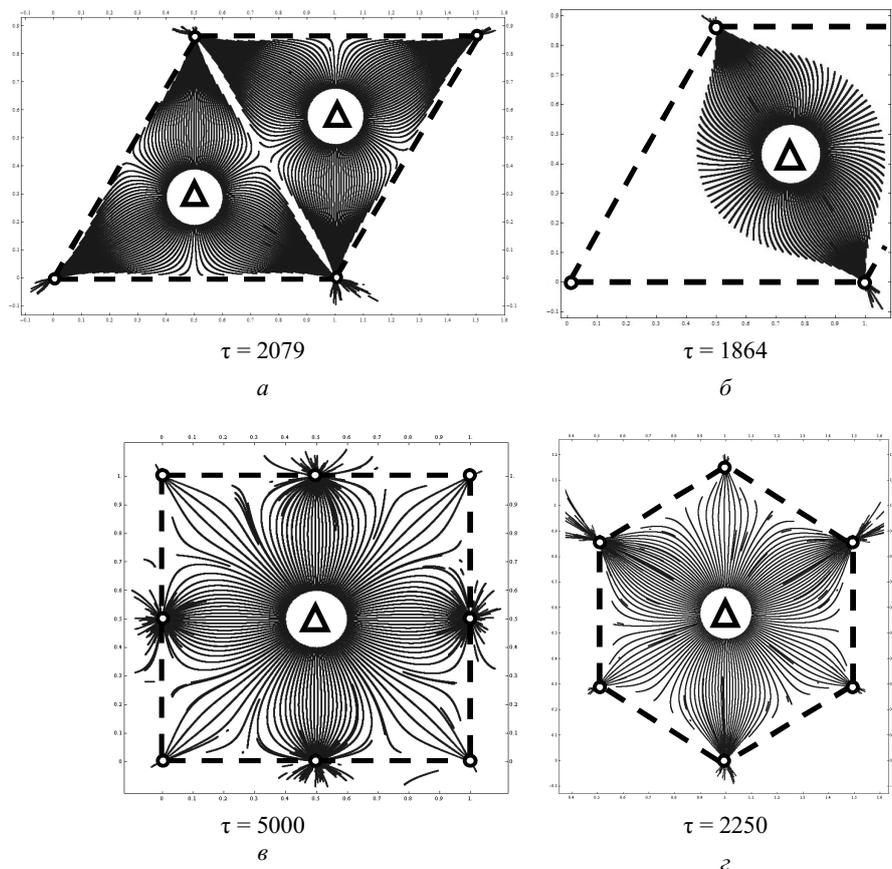
Р и с. 3. Картины фронта заводнения, построенные для пятиточечной (*a, в*) и однорядной линейной (*б, г*) схем расстановки скважин. Значения  $\tau$  отражают моменты прорыва воды в добывающие скважины. Траектории движения жидкости обозначены кривыми, направленными от нагнетательных (треугольники) скважин к добывающим (кружки)

### Заключение

Оценочный потенциал программного комплекса, создаваемого в рамках решения задачи, включает как качественный, так и количественный аспект сравнения. При использовании разрабатываемого программного средства возможен сравнительный анализ различных схем заводнения, включая как визуальную, так и строго числовую оценку их эффективности. При этом в качестве числовых критериев в на-

стоящий момент приняты *время начала обводнения добывающих скважин*, после которого нагнетание воды следует прекратить<sup>1</sup>, а также *коэффициент извлечения нефти*<sup>2</sup>: важно отметить отсутствие (на данный момент) программной реализации расчета КИН, что предполагается сделать в следующей версии программы.

На рис. 4 представлен пример сравнения схем заводнения с использованием вышеуказанных количественных критериев. На рисунке изображена граница ВНК для четырехточечной (а) и скошенной пятиточечной (б) моделей в момент прорыва воды, а также вид водяного пятна для девятиточечной (в) и семиточечной (г) схем на стадии, когда вода достигла всех добывающих скважин. В отличие от предыдущего изображения на рис. 5 дополнительно нанесены границы ячейки решетки L (жирный пунктир).



Р и с. 4. Сравнительный анализ нескольких схем заводнения: траектории движения воды обозначены кривыми, направленными от нагнетательных скважин (треугольники) к добывающим (кружки); жирный пунктир очерчивает границы ячейки решетки L

Визуально оценивая КИН на снимках верхнего ряда, нетрудно убедиться в пре-

<sup>1</sup> В рамках настоящей модели предполагается, что в последующий водный период [2] разработки объемы извлекаемой нефти будут незначительными.

<sup>2</sup> КИН представляет собой отношение площади заводненной области к площади исследуемого участка, и используется для оценки неизвлекаемых нефтяных запасов [1].

имуществе варианта  $a$ , при котором нагнетаемая жидкость заполняет почти всю ячейку. Сравнение значений  $\tau$  на картинах нижнего ряда говорит о большей скорости семиточечной схемы, обеспечивающей более быстрый результат, нежели девяти-точечная.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Уолкотт Д. Разработка и управление месторождениями при заводнении. – М., 2001.
2. Желтов Ю.П. Разработка нефтяных месторождений: Учеб. для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1998. – 465 с.: ил.
3. Горбатилов В.А., Костюченко С.В., Пальянов А.П. Технология дискретных закачек – основа для модернизации систем ППД и совершенствования методов заводнения нефтяных залежей // Вестник инженерингового центра ЮКОС, 2001. – № 2. – С. 45-53.
4. Астафьев В.И., Ротерс П.В. Моделирование двоякопериодических систем добывающих скважин // Вестник СамГУ, 2010. – Т. 78. – № 4. – С. 5-11.
5. Астафьев В.И., Ротерс П.В. Моделирование двоякопериодических систем добывающих скважин. 2. Коэффициент продуктивности // Вестник СамГУ, 2011. – Т. 89. – № 8. – С. 118-127.
6. Щелкачев В.Н., Ланук Б.Б. Подземная гидравлика: Учеб. пособие для студентов нефтегаз. специальностей. – М., Ижевск: РХД, 2001.
7. Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г., Якововский М.В. Моделирование процессов нефтедобычи на многопроцессорных вычислительных системах. – МСЦ РАН, 2001.
8. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде / Пер. с англ. – М.: Гостоптехиздат, 1949. – 628 с.

*Статья поступила в редакцию 13 июня 2013 г.*

## WATERFLOODING PROCESS MODELING USING BY WEIERSTRASS ELLIPTIC FUNCTIONS

*A. Y. Kasatkin*

Samara State University  
1, Pavlov academician st., Samara, 443011

*Waterflooding is one among several second oil recovery methods and it produces a high oil recovery rates by injection water into the oil keeping formation. Increasing waterflooding efficiency using by optimal well location scheme is an actual task. To achieve the corresponding goal we propose a program tool for well location schemes compare, both of by quantitative and qualitative characteristics. The program realization based on the oil keeping reservoir pattern represented a homogeneous formation with fixed thickness and infinite borders covering by dual periodical lattice: it includes production and injection wells into her cells. Also this lattice requires dual periodical property from the speed function defined on her cells. So we had used modified Weierstrass dzeta-function to describe oil-water filtering process in modeling reservoir.*

**Keywords:** *waterflooding, dual periodical lattice, Weierstrass dzeta-function, oil-water contact, production well filling, coefficient of oil extraction.*