

## АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ТИПОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ

*В.И. Котенев, А.В. Котенев*

Самарский государственный технический университет  
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

*Дано уточнение метода интегральных элементов, который используется при аппроксимации объектов управления с распределенными параметрами.*

**Ключевые слова:** *аппроксимация, дифференциальные уравнения с частными производными, уравнение теплопроводности, объект управления, метод интегральных элементов.*

Аппроксимация уравнений теплопроводности типовыми динамическими звеньями используется при построении математических моделей процессов теплообмена тел в некоторых электротехнологических установках [1, 3, 4]. Если таких тел не одно, а несколько, то задача значительно усложняется и на первый план выступает проблема понижения порядка аппроксимированных уравнений каждого тела с целью ограничения порядка дифференциального уравнения всего процесса теплообмена.

Метод интегральных элементов [2] с нелинейными координатными функциями позволяет получить приемлемую для практики погрешность аппроксимации при разбиении тела на малое число частей в том случае, если процесс теплообмена рассматривается при граничных условиях первого рода либо при граничных условиях второго или третьего рода, но протекающего при высокой интенсивности ( $Bi > 20$ ). С уменьшением числа  $Bi$  погрешность возрастает на недопустимую величину, при которой решение аппроксимированного уравнения становится неустойчивым. Объясняется это тем, что в предпоследнее уравнение входит температура внешней поверхности тела, которое не выражено через уравнение граничных условий.

В данной статье этот недостаток устраняется на примере теплообмена неограниченной пластины

$$\frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad x = [0, 1], \quad \tau = [0, \infty] \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \theta(x_{n+1}, \tau)}{\partial \tau} = Bi(\theta_c - \theta(x_{n+1}, \tau)); \quad \frac{\partial \theta(x_1, \tau)}{\partial x} = 0; \quad \theta(x, 0) = 0. \quad (2)$$

Исходное уравнение (1) в МИЭ заменяют конечным числом уравнений

$$\frac{\partial \theta_i(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_i(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

В результате двойного интегрирования (3) по пространственной координате  $x$  получают:

---

*Виктор Иванович Котенев (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Электроснабжение промышленных предприятий».*

*Александр Викторович Котенев (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Электроснабжение промышленных предприятий».*

$$\frac{d}{d\tau} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx_s \int_{x_i}^{x_s} \theta_i(x, \tau) dx = \theta_{i+1} - \theta_i - \frac{\partial \theta_i(x_i, \tau)}{\partial x} \Delta x_i, \quad (4)$$

где  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ;  $x_1 = 0$ ,  $x_{n+1} = 1$ .

Выбирают координатные функции [2, 3]:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{i-1}(x, \tau) &= b_i \left[ (\theta_i(\tau) - \theta_{i-1}(\tau)) x^m - \theta_i(\tau) x_{i-1}^m + \theta_{i-1}(\tau) x_i^m \right]; \\ \bar{\theta}_i(x, \tau) &= d_i \left[ (\theta_{i+1}(\tau) - \theta_i(\tau)) x^m - \theta_{i+1}(\tau) x_i^m + \theta_i(\tau) x_{i+1}^m \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$b_i = (x_i^m - x_{i-1}^m)^{-1}; \quad d_i = (x_{i+1}^m - x_i^m)^{-1}.$$

Определяют межэлементные граничные условия

$$\frac{\partial \theta_i(x_i, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial}{2\partial x} (\bar{\theta}_{i-1}(x_i, \tau) + \bar{\theta}_i(x_i, \tau)) \quad (6)$$

и подставляют в левую часть уравнения (4) вместо  $\bar{\theta}_i(x, \tau)$  (5) значение  $\bar{\theta}_i(x, \tau)$ , а в правую часть этого уравнения вместо производной – усредненную производную (6). В результате получают:

$$b_{11}^{(2)} \frac{d\theta_1}{d\tau} + b_{21}^{(2)} \frac{d\theta_2}{d\tau} = -\theta_1 + \theta_2 - \Delta x_2 \frac{\partial \theta(x_1, \tau)}{\partial x}; \quad (7)$$

$$b_{li}^{(2)} \frac{d\theta_i}{d\tau} + b_{2i}^{(2)} \frac{d\theta_{i+1}}{d\tau} = c_{1i} b_i \Delta x_i \theta_{i-1} - a_{5i} \theta_i + c_{4i} \theta_{i+1}, \quad (8)$$

где

$$b_{li}^{(2)} = d_i (a_{li} - d_{2i} + a_{2i} x_{i+1}^m); \quad b_{2i}^{(2)} = d_i (a_{3i} + d_{2i} - a_{2i} x_i^m); \quad d_{2i} = \frac{x_{i+1}^{m+2} - x_i^{m+2}}{(m+1)(m+2)};$$

$$a_{li} = \Delta x_i x_i \left( \frac{x_i^m}{m+1} - x_{i+1}^m \right); \quad a_{2i} = \frac{1}{2} (x_{i+1}^2 - x_i^2); \quad a_{3i} = \frac{m x_i^m \Delta x_i}{m+1}; \quad a_{4i} = c_{1i} \Delta x_i;$$

$$a_{5i} = 1 + a_{4i} (b_i - d_i); \quad c_{1i} = \frac{1}{2} m x_i^{m-1}; \quad c_{2i} = \frac{1}{2} m x_{i+1}^{m-1}; \quad c_{4i} = 1 - c_{1i} d_i \Delta x_i.$$

В правой части уравнения (7) производная согласно условию (3) равна нулю. Выразим в правой части уравнения (8) при  $i = n$  температуру  $\theta_{n+1}$  через выражения (2). С этой целью проинтегрируем уравнение (3) в пределах границ последнего участка:

$$\frac{d}{d\tau} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \theta_n(x, \tau) dx = \frac{\partial \theta_n(x_{n+1}, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial \theta_n(x_n, \tau)}{\partial x}. \quad (9)$$

Подставим в левую часть уравнения функцию (5), а в правую часть – соотношение (2) и (6) при  $i = n$ . В результате этого получим:

$$b_{1n}^{(1)} \frac{d\theta_n}{d\tau} + b_{2n}^{(1)} \frac{d\theta_{n+1}}{d\tau} = c_{1n} [b_n \theta_{n-1} - (b_n - d_n) \theta_n + d_n \theta_{n+1}] + \text{Bi}(\theta_c - \theta_{n+1}), \quad (10)$$

где

$$b_{1n}^{(1)} = d_n (x_{n+1}^m \Delta x_n - d_{1n}); \quad b_{2n}^{(1)} = -d_n (x_n^m \Delta x_n - d_{1n}); \quad d_{1n} = \frac{x_{n+1}^{m+1} - x_n^{m+1}}{m+1}.$$

Отсюда определяем

$$\theta_{n+1} = -\frac{b_{1n}^{(1)}}{c_{3n}} \frac{d\theta_n}{d\tau} - \frac{b_{2n}^{(1)}}{c_{3n}} \frac{d\theta_{n+1}}{d\tau} + \frac{\text{Bi}}{c_{3n}} \theta_c + \frac{c_{1n} b_n}{c_{3n}} \theta_{n-1} - \frac{c_{1n} (b_n - d_n)}{c_{3n}} \theta_n, \quad (11)$$

где  $c_{3n} = c_{1n} d_n + \text{Bi}$ .

В результате подстановки (11) в (8) при  $i = n$  получим:

$$\theta_n(p) = \frac{k_{2n}}{T_{1n} p + 1} \theta_c(p) + \frac{k_{1n}}{T_{1n} p + 1} \theta_{n-1}(p) - \frac{T_{2n} p}{T_{1n} p + 1} \theta_{n+1}(p), \quad (12)$$

где

$$T_{1n} = \frac{c_{3n} b_{1n}^{(2)} + c_{4n} b_{1n}^{(1)}}{c_{3n} c_{5n}}; \quad T_{2n} = \frac{c_{3n} b_{2n}^{(2)} + c_{4n} b_{2n}^{(1)}}{c_{3n} c_{5n}}; \quad k_{2n} = \frac{c_{4n}}{c_{3n} c_{5n}} \text{Bi};$$

$$k_{1n} = \frac{c_{1n} b_n (c_{3n} \Delta x_n + c_{4n})}{c_{3n} c_{5n}}; \quad c_{4n} = 1 - c_{1n} d_n \Delta x_n; \quad c_{5n} = a_{5n} + \frac{c_{1n} c_{4n} (b_n - d_n)}{c_{3n}}.$$

Уравнения (7), (8), (10) можно представить в операторной форме:

$$v_1(p) = \frac{1 - T_{21} p}{T_{11} p + 1} v_2(p); \quad (13)$$

$$v_i(p) = \frac{k_{1i}}{T_{1i} p + 1} v_{i-1}(p) + \frac{k_{2i} (1 - T_{2i} p)}{T_{1i} p + 1} v_{i+1}(p), \quad (14)$$

где

$$T_{11} = b_{11}^{(2)}; \quad T_{21} = b_{21}^{(2)}; \quad T_{1i} = \frac{b_{1i}^{(2)}}{a_{5i}}; \quad T_{2i} = \frac{b_{2i}^{(2)}}{c_{4i}}; \quad k_{1i} = \frac{c_{1i} b_i \Delta x_i}{a_{5i}}; \quad k_{2i} = \frac{c_{4i}}{a_{5i}}; \quad i = 2, 3, \dots, n-1.$$

Последнее уравнение можно найти из уравнения (10):

$$v_{n+1}(p) = \frac{k_{3n}}{T_{1,n+1} p + 1} v_{n-1}(p) + \frac{k_{2,n+1}}{T_{1,n+1} p + 1} v_c(p) - \frac{k_{4n} (T_{2,n+1} p + 1)}{T_{1,n+1} p + 1} v_n(p), \quad (15)$$

где

$$T_{1,n+1} = \frac{b_{2n}^{(1)}}{c_{3n}}; \quad T_{2,n+1} = \frac{b_{1n}^{(1)}}{c_{1n} (b_n - d_n)}; \quad k_{3n} = \frac{c_{1n} b_n}{c_{3n}}; \quad k_{2,n+1} = \frac{\text{Bi}}{c_{3n}}; \quad k_{4n} = \frac{c_{1n} (b_n - d_n)}{c_{3n}}.$$

Уравнения (12) – (15) образуют полную систему из  $n + 1$  уравнений.

При одноэлементной аппроксимации ( $n = 1$ ) вместо (9) получаем

$$\frac{d}{d\tau} \int_{x_1}^{x_2} \theta_1(x, \tau) dx = \frac{\partial \theta_1(x_2, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial \theta_1(x_1, \tau)}{\partial x}.$$

В результате интегрирования полученного уравнения после подстановки в него граничных условий (2), а затем его интегрирования получаем

$$b_{11}^{(1)} \frac{d\theta_1}{d\tau} + b_{21}^{(1)} \frac{d\theta_1}{d\tau} = \text{Bi} (\theta_c - \theta_2). \quad (16)$$

Из (16) находим

$$\theta_2 = \frac{b_{11}^{(2)}}{\text{Bi}} \frac{d\theta_1}{d\tau} + \frac{b_{21}^{(1)}}{\text{Bi}} \frac{d\theta_2}{d\tau} + \theta_c. \quad (17)$$

При подстановке граничного условия (2) в уравнение (4) и его интегрирования получаем

$$b_{11}^{(2)} \frac{d\theta_1}{d\tau} + b_{21}^{(2)} \frac{d\theta_2}{d\tau} = -\theta_1 + \theta_2. \quad (18)$$

Подставив (17) в (18), будем иметь

$$\left( b_{11}^{(2)} + \frac{b_{11}^{(1)}}{\text{Bi}} \right) \frac{d\theta_1}{d\tau} + \left( b_{21}^{(2)} + \frac{b_{21}^{(1)}}{\text{Bi}} \right) \frac{d\theta_2}{d\tau} = \theta_c - \theta_1. \quad (19)$$

После преобразования (16) и (19) получаем два операторных уравнения:

$$v_1(p) = \frac{v_c(p) - T_{21}pv_2(p)}{T_{11}p + 1};$$

$$v_2(p) = \frac{v_c(p) - T_{12}pv_1(p)}{T_{22}p + 1},$$

где  $T_{11} = b_{11}^{(2)} + \frac{b_{11}^{(1)}}{\text{Bi}}$ ;  $T_{21} = b_{21}^{(2)} + \frac{b_{21}^{(1)}}{\text{Bi}}$ ;  $T_{22} = \frac{b_{21}^{(1)}}{\text{Bi}}$ ;  $T_{12} = \frac{b_{11}^{(1)}}{\text{Bi}}$ ;  $b_{11}^{(1)} = \frac{m}{m+1}$ ;  $b_{21}^{(1)} = \frac{1}{m+1}$ ;  
 $b_{11}^{(2)} = \frac{m(m+3)}{2(m+1)(m+2)}$ ;  $b_{21}^{(2)} = \frac{1}{(m+1)(m+2)}$ ;  $v_c(p) = \frac{\theta_c(p)}{\theta_c}$ ;  $v_i(p) = \frac{\theta_i(p)}{\theta_c}$ ;  $i = 1, 2$ .

Этим уравнениям соответствует расчетная схема (рис. 1).

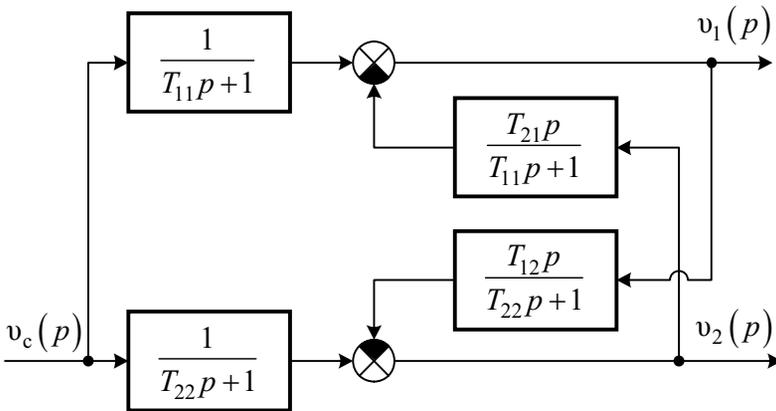


Рис. 1. Расчетная схема при одноэлементной аппроксимации уравнения теплопроводности пластины

На рис. 2 и 3 представлены графики переходных характеристик  $v_1(\tau)$  и  $v_2(\tau)$ , построенные по расчетной схеме, представленной на рис. 1, при  $\text{Bi}=1$  и  $m = 1, 2, 4$ , а также их точные значения  $v_{1T}(\tau)$ ,  $v_{2T}(\tau)$ , полученные из решения уравнения (1) с крайними условиями (2) [5].

Анализ погрешности аппроксимации показал, что ее минимум  $\delta_{\min} = 1,2\%$  достигается при  $m = 1,8$ . Эта величина совпадает с установившимся значением параметра  $m$ , который соответствует температурному распределению при регулярном режиме.

Оптимальная величина  $m_{\text{опт}}$  определяется из точных решений, известных для тел канонических форм. При отсутствии точного решения величину  $m_{\text{опт}}$  можно найти из приближенного решения, полученного при линейной аппроксимации

( $m = 1$ ) с достаточно большим  $n$  ( $n > 20$ ) и фиксированным  $\tau$ , взятым после наступления регулярного режима ( $\tau > 0,1$ ).

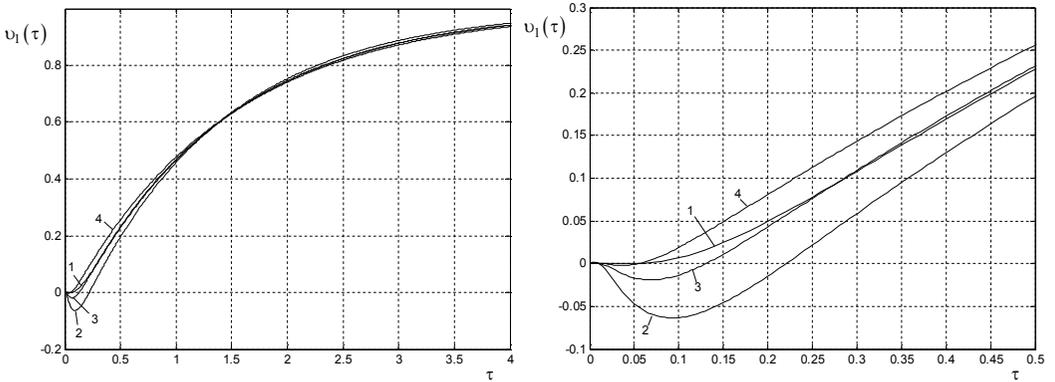


Рис. 2. Переходные характеристики  $v_1(\tau) = \theta_1(\tau)/\theta_c$  при ступенчатом воздействии

$v_c(\tau) = 1(\tau)$ : 1 – точное решение; 2 –  $m = 1$ ; 3 –  $m = 2$ ; 4 –  $m = 4$

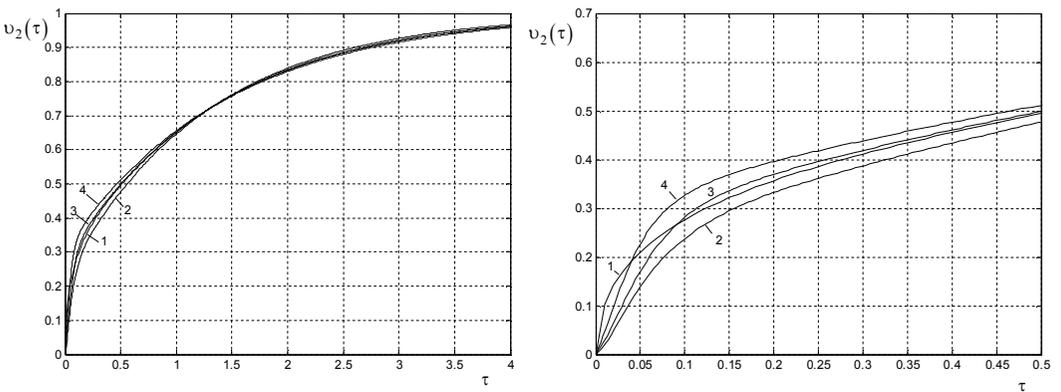


Рис. 3. Переходные характеристики  $v_2(\tau) = \theta_2(\tau)/\theta_c$  при ступенчатом воздействии

$v_c(\tau) = 1(\tau)$ : 1 – точное решение; 2 –  $m = 1$ ; 3 –  $m = 2$ ; 4 –  $m = 4$

## Выводы

Получена уточненная система обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующая уравнение нестационарной теплопроводности пластины. Показано, что одноэлементная аппроксимация может быть использована в практике проектирования математических моделей объектов управления в электротехнологических установках с конвективным теплообменом.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Котенев В.В., Котенев В.И. Математическая модель диска газотурбинного двигателя при управлении термоциклическими нагрузками на стенде // Электротехника. – 2008. – № 8. – С. 62-64.
2. Котенев В.И. Приближенный метод решения задач нестационарной теплопроводности // Известия Академии наук СССР. Энергетика и транспорт. – 1989. – № 3. – С. 111-116.

3. *Котенев В.И.* Математическая модель протяжной печи на воздушной подушке // Известия вузов. Черная металлургия. – 1990. – № 5. – С. 72-74.
4. *Котенев В.И.* Система автоматического управления термоциклическими испытаниями диска газотурбинного двигателя // Известия вузов. Черная металлургия. – 2000. – № 5. – С. 40-42.
5. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности : Учеб. пособие для студентов теплотехнических специальностей высших учебных заведений. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.

*Статья поступила в редакцию 18 февраля 2013 г.*

## **APPROXIMATION OF THE THERMAL CONDUCTIVITY EQUATIONS WITH FINITE NUMBER OF THE ELEMENTARY DYNAMIC UNITS**

***V.I. Kotenev, A.V. Kotenev***

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

*Refinement of the integral elements method is presented, which is used in approximation of the distributed parameter control objects.*

***Keywords:*** *approximation, partial differential equations, thermal conductivity equation, control object, integral elements method.*

---

*Viktor I. Kotenev (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.*  
*Alexander V. Kotenev (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.*