

СИСТЕМА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЛЕКТИВНЫМИ ИНВЕСТИЦИЯМИ В МОДЕЛИ МАРКОВИЦА

В.Г. Саркисов

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Предлагается новый подход к построению системы доверительного управления инвестициями. Рассматриваются оптимальные инвестиционные портфели пула инвесторов с различными предпочтениями в рамках модели Марковица.

Ключевые слова: доверительное управление, инвестиционный портфель, модель Марковица, доходность, минимизация риска.

Введение

Рассматривается вопрос получения дополнительной полезности при управлении портфелями группы инвесторов. В настоящее время существует два основных подхода:

1) индивидуальное управление – для каждого инвестора вырабатывается или выбирается индивидуальная стратегия управления портфелем, соответствующая его системе предпочтений;

2) коллективное управление – инвесторы со схожими предпочтениями объединяются в группы (фонды, пулы), для каждой из которых выбирается стратегия.

Индивидуальное управление более качественно учитывает предпочтения, однако сама услуга управления требует больших трудозатрат и обходится инвестору дороже.

В настоящей работе предлагается новый подход к формированию фондов, который потенциально позволит превзойти по эффективности индивидуальное управление при сохранении преимуществ коллективного управления.

Оптимальный портфель ценных бумаг в модели Марковица

Классический подход Марковица [1] к построению портфеля из множества $I = \{1, 2, \dots, n\}$ инвестиционных инструментов предполагает известными оценки математических ожиданий m и ковариаций C доходностей этих инструментов:

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

На основе этих оценок для заданной структуры портфеля $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ можно определить оценки математического ожидания E и дисперсии V доходности:

$$E = m^T x = \sum_{i=1}^n m_i x_i; \quad (1)$$

Виген Геннадьевич Саркисов (к.т.н.), доцент кафедры «Высшая математика и прикладная информатика».

$$V = x^T C x = \sum_{i,j=1}^n C_{ij} x_i x_j . \quad (2)$$

Для каждого значения доходности E решалась задача минимизации риска:

$$V = x^T C x \rightarrow \min_x ; \quad (3)$$

$$E = m^T x ; \quad (4)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1..n ; \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 . \quad (6)$$

Ограничения (5) и (6) определяют множество допустимых портфелей.

При решении задачи (3), (4), (6) по методу множителей Лагранжа без учета ограничения (5) установлено [2], что доли x_i инструментов в портфеле при увеличении E изменяются линейно:

$$x_i = a_i E + b_i , \quad (7)$$

где

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \frac{k_0}{k_0^2 - k_1 k_2} C^{-1} J - \frac{k_1}{k_0^2 - k_1 k_2} C^{-1} m, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{k_0}{k_0^2 - k_1 k_2} C^{-1} m - \frac{k_2}{k_0^2 - k_1 k_2} C^{-1} J ;$$

$$k_0 = J^T C^{-1} m, \quad k_1 = J^T C^{-1} J, \quad k_2 = m^T C^{-1} m, \quad J = (1, \dots, 1)^T .$$

В целях учета ограничения (5) для каждого значения E разобьем все множество I инвестиционных инструментов на два подмножества:

$$I_0(E) = \{i : x_i = 0\} , \quad (8)$$

$$I_1(E) = \{i : x_i > 0\} . \quad (9)$$

Очевидно, что решение задачи (3), (4), (6) для подмножества $I_1(E)$ эквивалентно решению задачи (3), (4), (5), (6) для множества I . Если для всех значений некоторого интервала $E \in (E_1, E_2)$ множества $I_1(E)$ совпадают, то на этом интервале (по аналогии с (7)) имеет место линейная зависимость долей инструментов в портфеле от математического ожидания доходности.

Таким образом, введение ограничения (5) приводит к тому, что доли инструментов в портфеле с ростом E изменяются линейно до тех пор, пока из портфеля не будет исключен (то есть переведен из $I_1(E)$ в $I_0(E)$) или, наоборот, добавлен (переведен из $I_0(E)$ в $I_1(E)$) инвестиционный инструмент. Дальнейшее изменение долей портфеля также происходит линейно, но с другими коэффициентами a_i и b_i .

На рис. 1 представлены результаты решения задачи (3)–(6) для 10 наиболее ликвидных акций российского фондового рынка.

Подставив (7) в (2), получим зависимость V от E :

$$V = \sum_{i,j=1}^n C_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n C_{ij} (a_i E + b_i) (a_j E + b_j) =$$

$$= E^2 \sum_{i,j=1}^n C_{ij} a_i a_j + E \sum_{i,j=1}^n C_{ij} (a_i b_j + a_j b_i) + \sum_{i,j=1}^n C_{ij} b_i b_j.$$

Обозначив $\alpha_2 = \sum_{i,j=1}^n C_{ij} a_i a_j$, $\alpha_1 = \sum_{i,j=1}^n C_{ij} (a_i b_j + a_j b_i)$, $\alpha_0 = \sum_{i,j=1}^n C_{ij} b_i b_j$, получим:

$$V = \alpha_2 E^2 + \alpha_1 E + \alpha_0 \quad (11)$$

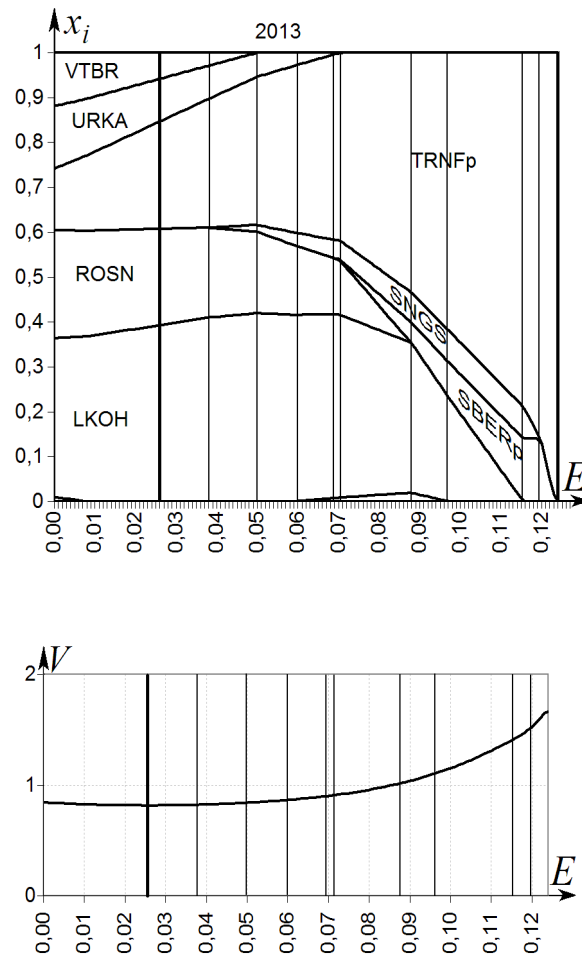


Рис. 1. Зависимость долей активов и риска от доходности эффективного портфеля

Вывод: на каждом участке, где доли инструментов в портфеле изменяются линейно, зависимость дисперсии доходности от математического ожидания доходности параболическая, а вся зависимость – кусочно-параболическая (жирная линия на рис. 2). Зависимость $V(E)$ является гладкой и строго вогнутой.

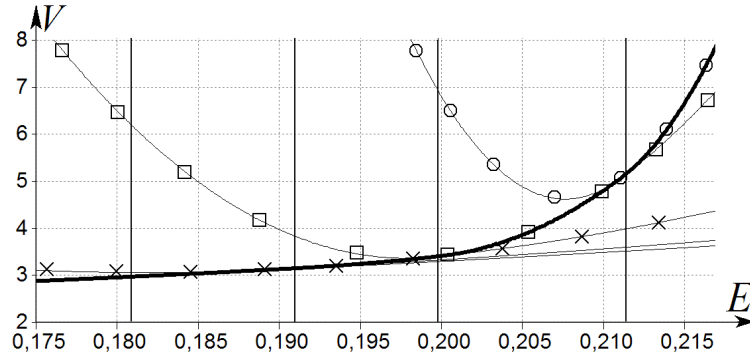


Рис. 2. Эффективная граница множества портфелей

Объединение портфелей пары инвесторов с различными предпочтениями в модели Марковица

В зависимости от индивидуальных предпочтений по риску и доходности оптимальным для инвестора является тот или иной портфель на эффективной границе множества портфелей. Портфель, полученный путем объединения портфелей инвесторов с существенно различающимися предпочтениями, часто является неоптимальным, что говорит о возможности увеличения математического ожидания E или снижения дисперсии V доходности при объединении портфелей. Таким образом, формирование объединенного портфеля группы инвесторов потенциально создает для каждого из инвесторов лучшее соотношение риска и доходности, чем они имели бы без объединения портфелей.

Рассмотрим условия возникновения такого преимущества.

Теорема 1. Если портфели x^* и x^{**} принадлежат разным участкам (т. е. $\exists i: (a_i^* \neq a_i^{**}) \vee (b_i^* \neq b_i^{**})$), то любой портфель $x_{sum} = \lambda x^* + (1-\lambda)x^{**}$ при $\lambda \in (0,1)$ неоптимален.

Доказательство. Покажем, что при $\lambda \in (0,1)$ все объединенные портфели x_{sum} являются допустимыми, то есть удовлетворяют ограничениям (5) и (6). Портфели x^* и x^{**} удовлетворяют условию (5), следовательно

$$\begin{cases} x_i^* \geq 0 \\ x_i^{**} \geq 0 \\ \lambda \in (0,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x_i^* \geq 0 \\ (1-\lambda)x_i^{**} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x_{sum i} \geq 0, \quad (12)$$

то есть портфель x_{sum} также удовлетворяет ограничению (5). Для проверки (6) найдем сумму долей инструментов в портфеле x_{sum} :

$$\sum_{i=1}^n x_{sum i} = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i^* + (1-\lambda)x_i^{**}) = \lambda \sum_{i=1}^n x_i^* + (1-\lambda) \sum_{i=1}^n x_i^{**} = \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 = 1, \quad (13)$$

то есть ограничение (6) для портфеля x_{sum} также выполняется. Таким образом, при любом значении $\lambda \in (0,1)$ портфель x_{sum} является допустимым.

Покажем, что x_{sum} не принадлежит эффективной границе при $\lambda \in (0,1)$. С изменением λ доли инструментов в портфеле x_{sum} изменяются линейно. Как было показа-

но выше, при линейном изменении долей в портфеле зависимость V от E – параболическая вида (11). На рис. 3 представлен фрагмент эффективной границы.

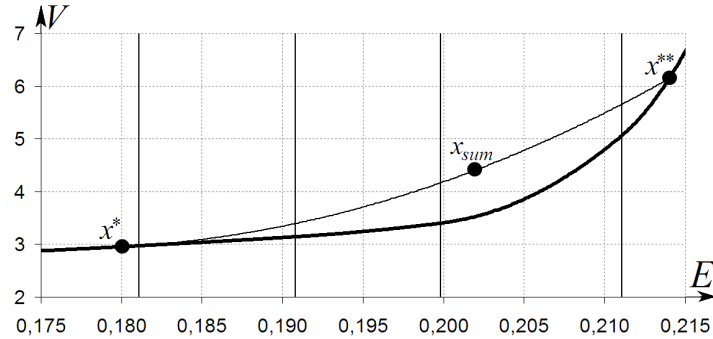


Рис. 3. Объединенный портфель, не принадлежащий эффективной границе

Так как эффективная граница является гладкой кривой, участки эффективной границы $V = \alpha_2^* E^2 + \alpha_1^* E + \alpha_0^*$ и $V = \alpha_2^{**} E^2 + \alpha_1^{**} E + \alpha_0^{**}$ в точке пересечения E_0 имеют одинаковые значения и одинаковые первые производные:

$$V(E_0) = \alpha_2^* E_0^2 + \alpha_1^* E_0 + \alpha_0^* = \alpha_2^{**} E_0^2 + \alpha_1^{**} E_0 + \alpha_0^{**}; \quad (14)$$

$$\frac{dV(E_0)}{dE} = 2\alpha_2^* E_0 + \alpha_1^* = 2\alpha_2^{**} E_0 + \alpha_1^{**}. \quad (15)$$

Параболы эффективной границы не могут отличаться лишь коэффициентом α_0 , так как при этом не выполнялось бы условие непрерывности границы (14), следовательно, параболы отличаются хотя бы одним из коэффициентов α_1 или α_2 . Из условия гладкости границы (15) следует, что отличие в коэффициентах α_1 влечет различие в α_2 (и наоборот). При этом $\alpha_2^* < \alpha_2^{**}$ (при $E^* < E^{**}$). Содержащая x_{sum} парабола не может совпадать одновременно с двумя разными параболой, образующими эффективную границу. Следовательно, x_{sum} не принадлежит эффективной границе.

Таким образом, портфели x_{sum} неоптимальны при $\lambda \in (0, 1)$, т. к. соответствующая парабола проходит выше эффективной границы.

Вывод: объединение портфелей инвесторов с различным уровнем неприятия риска и последующая оптимизация объединенного портфеля создают возможность для повышения доходности и/или снижения риска без ухудшения других показателей.

Анализ эффективности разбиения множества инвесторов на подмножества в модели Марковица

Обобщим результаты, полученные для пары инвесторов на случай произвольного множества инвесторов.

При анализе возможностей инвестирования для множества инвесторов возникает вопрос оптимального разбиения этого множества на подмножества с целью повышения эффективности.

Пусть множество $M = \{1, 2, \dots, m\}$ состоит из m инвесторов, для каждого из которых с учетом индивидуальных предпочтений на эффективной границе выбран оптимальный портфель x^j ($j=1..m$). Объединенный портфель множества инвесторов M :

$$x_{sum} = \sum_{j \in M} \lambda_j x^{j*}, \quad (16)$$

где коэффициенты λ_j характеризуют долю j -го инвестора в объединенном портфеле множества:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad (17)$$

$$\lambda_j \geq 0. \quad (18)$$

Как было показано ранее, при существенном различии в уровне неприятия риска инвесторами подмножества портфель x_{sum} не принадлежит эффективной границе и может быть заменен эффективным портфелем x_{sum}^* , который характеризуется математическим ожиданием доходности не меньшим, а дисперсией доходности не большей, чем у портфеля x_{sum} .

Разобьем множество M на непересекающиеся подмножества M_k :

$$\bigcup_{k=1}^m M_k = M; \quad (19)$$

$$M_k \cap M_l = \emptyset, k \neq l. \quad (20)$$

Подмножество M_k характеризуется объединенным портфелем x_{sum}^k :

$$x_{sum}^k = \sum_{j \in M_k} \lambda_j x^{j*}. \quad (21)$$

Теорема 2. Портфель, являющийся объединением всех портфелей x_{sum}^k подмножеств M_k , не может иметь одновременно большее математическое ожидание доходности и меньшую дисперсию доходности, чем портфель x_{sum}^* .

Доказательство. Пусть все множество инвесторов разбито на два подмножества и для каждого подмножества найден объединенный портфель (x_{sum}^1 и x_{sum}^2) и соответствующий оптимальный портфель (x_{sum}^{1*} и x_{sum}^{2*}). Если x_{sum}^{1*} и x_{sum}^{2*} принадлежат одному отрезку линейного изменения долей в портфеле (рис. 4), то портфель x_{sum} , полученный при их объединении (то есть при объединении всех инвесторов), принадлежит эффективной границе.

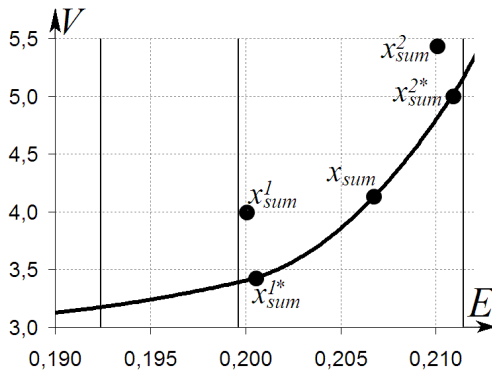


Рис. 4. Объединенный портфель подмножеств инвесторов, принадлежащий эффективной границе

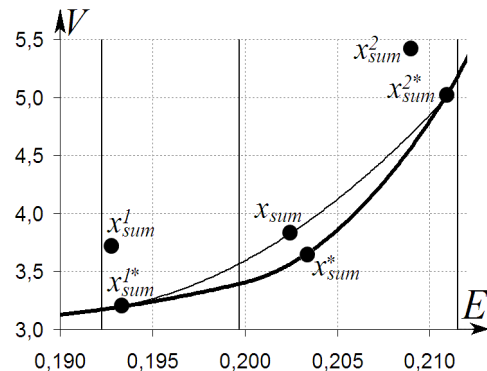


Рис. 5. Объединенный портфель подмножеств инвесторов, не принадлежащий эффективной границе

Если же x_{sum}^{1*} и x_{sum}^{2*} принадлежат разным отрезкам (рис. 5), то портфель x_{sum} (в соответствии с *теоремой 1*) не является эффективным, то есть существует портфель x_{sum}^* с большим математическим ожиданием и меньшей дисперсией доходности, принадлежащий эффективной границе.

При разбиении множества инвесторов на большее количество подмножеств можно провести аналогичные рассуждения, присоединяя к одному из подмножеств последовательно все остальные: $M = (((M_1 \cup M_2) \cup M_3) \dots \cup M_m)$.

Вывод: любое разбиение множества на группы дает эффективность оптимизации портфеля не выше, чем оптимизация объединенного портфеля всего множества инвесторов.

О распределении дополнительной полезности между инвесторами и управляющим

В общем случае распределение дополнительной полезности (снижение риска или повышение доходности) является вопросом договоренности/соглашения инвесторов.

При разработке договоренности предлагается пользоваться следующим соображением: чем дальше оптимальный портфель данного инвестора лежит на эффективной границе от объединенного оптимизированного портфеля, тем больше его вклад в повышение эффективности управления. Следовательно, основная часть дополнительной полезности должна быть распределена в пользу таких инвесторов. Если же индивидуальный портфель инвестора по структуре совпадает с объединенным, то такой инвестор не участвует в создании дополнительной полезности. Единственным стимулом для его привлечения к формированию объединенного портфеля является снижение трудозатрат управляющего.

Обобщение понятия инвестиционного инструмента

Теорема 2 может быть применена для широкого спектра инвестиций. При управлении инвестиционным портфелем в качестве инструментов могут выступать не только традиционно рассматриваемые ценные бумаги, но и некоторые другие объекты или процессы, имеющие ликвидационную стоимость и генерирующие поток платежей в пользу инвестора. Примеры таких инструментов:

- оборудование для модернизации производства;
- недвижимость, покупаемая для дальнейшей сдачи в аренду;
- алгоритм управления портфелем реальных ценных бумаг. В этом случае портфель инвестора будет составлен из долей портфелей, каждый из которых управляет-ся по своему алгоритму [3].

При использовании различных инвестиционных инструментов ограничения на доли в портфеле приобретают вид, отличный от (5) и (6) [4] При этом задача (3)–(6) является задачей нелинейного программирования (в большинстве случаев с линейными ограничениями) [5, 6].

Выводы

1. Предложен принципиально новый подход к построению системы управления инвестиционным фондом – объединение инвесторов с несовпадающими предпочтениями. Трудозатраты управляющего фондом сопоставимы с таковыми у управляющего обычным фондом, а эффективность выше, чем при индивидуальном управлении.

2. Доказана целесообразность централизованного управления инвестиционными

портфелями группы инвесторов. Для группы в целом формируется единая стратегия управления инвестиционным портфелем. Показана возможность извлечения дополнительной прибыли или снижения риска при объединении портфелей.

3. При управлении свободными средствами подразделений холдинга [7**Ошибка! Источник ссылки не найден.**] централизация управления позволяет повысить эффективность. Если подразделения управляют своими инвестициями самостоятельно (или объединяясь в некоторые группы), то доходность получается ниже, а риск – выше, чем при объединении всех в одну группу.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК:

1. Markowitz H. Portfolio selection // The Journal Of Finance. – 1952. – № 1. – С. 77-91.
2. Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бейли Д.В. Инвестиции. – М.: Инфра-М, 2003.
3. Саркисов В.Г., Саркисов Г.А. Синтез системы управления инвестиционным портфелем на основе моделирования виртуальных финансовых инструментов // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2011. – № 3(31). – С. 33-39.
4. Саркисов В.Г. Критериальные множества оценок качества управления инвестиционным портфелем при различных критериях риска // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2012. – № 4(36). – С. 82-90.
5. Kuhn H.W., Tucker A.W. Nonlinear programming // Proceedings of 2nd Berkeley Symposium. Berkeley: University of California Press. pp. 481-492, 1951.
6. Karush W. Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints. M.Sc. Dissertation. Dept. of Mathematics, Univ. of Chicago, Chicago, Illinois.
7. Саркисов В.Г., Ваганова Н.Р. Интеграция подсистемы управления инвестиционным портфелем на финансовом рынке в систему управления промышленным холдингом // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2013): Материалы VII Международной конференции. – ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН. – 2013. – С. 301-303.

Статья поступила в редакцию 3 октября 2013 г.

THE OPTIMAL CONTROL SYSTEM OF COLLECTIVE INVESTMENTS UNDER MARKOWITZ'S MODEL

V.G. Sarkisov

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

A new approach to collective trust management is offered. Optimum investment portfolios of a pool of investors with various preferences under Markovits's model are treated.

Keywords: trust management, investment portfolio, Markowitz's model, profitability, risk minimization.

Vigen G. Sarkisov (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.