УДК 621.3.078

СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫМИ ОБЪЕКТАМИ

А.В. Стариков, С.Л. Лисин

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: star58@mail.ru

Рассмотрен синтез системы управления неустойчивым объектом третьего порядка. Предложен способ структурного построения системы управления неустойчивым объектом. Найдены передаточные функции регуляторов, обеспечивающие высокое быстродействие.

Ключевые слова: *система управления, структурная схема, передаточная функция, неустойчивый объект управления, пропорционально-дифференциальный регулятор, интегральный регулятор, условия устойчивости.*

Ряд технических задач требует обеспечить качественное управление принципиально неустойчивыми объектами. К таким объектам прежде всего относятся процессы, имеющие внутренние положительные обратные связи. Примером может послужить процесс перемещения ротора в поле электромагнитов, который описывается передаточной функцией [1]

$$W_{оу}(p)=\frac{k_{оу}}{a_0p^3+a_1p^2+a_2p-1}, \qquad (1)$$

где $k_{оу}$ – коэффициент передачи объекта управления;

a_0, a_1 и a_2 – коэффициенты характеристического полинома.

Поскольку как минимум один коэффициент характеристического полинома передаточной функции (1) является отрицательным, то рассматриваемый объект управления действительно неустойчив.

Для обеспечения высокого быстродействия при управлении объектом с передаточной функцией вида (1) предлагается применить двухконтурную систему (рис. 1).

Первый (внутренний) контур содержит пропорционально-дифференциальный регулятор с передаточной функцией:

$$W_{пд}(p)=k_{пд}(T_{пд}p+1),$$

где $k_{пд}$ – коэффициент передачи, а $T_{пд}$ – постоянная времени регулятора, собственно объект управления, датчик обратной связи с коэффициентом передачи $k_{ос}$ и дифференцирующее звено $k_{диф}p$. Пропорционально-дифференциальный регулятор предназначен для создания необходимого фазового сдвига во внутреннем контуре.

Передаточная функция первого замкнутого контура:

Александр Владимирович Стариков (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Электропривод и промышленная автоматика».

Сергей Леонидович Лисин, начальник отдела кадров.

$$W_1(p)=\frac{k_{пд}k_{оу}(T_{пд}p+1)}{a_0p^3+(a_1+k_{p1}T_{пд})p^2+(a_2+k_{p1})p-1},$$

где $k_{p1}=k_{пд}k_{оу}k_{диф}k_{ос}$.

Второй контур замкнут по датчику обратной связи и кроме замкнутого внутреннего контура содержит пропорциональный регулятор с коэффициентом передачи $k_п$, который обеспечивает вместе с регулятором внутреннего контура требуемые статические и динамические свойства системы управления.

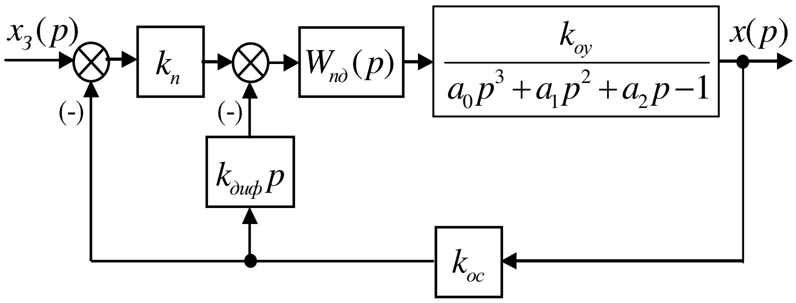

Рис. 1. Структурная схема двухконтурной системы управления неустойчивым объектом третьего порядка

Передаточная функция замкнутой двухконтурной системы управления:

$$W_2(p)=\frac{x(p)}{x_з(p)}=\frac{k_{p2}(T_{пд}p+1)}{k_{ос}(k_{p2}-1)\left[\frac{a_0}{k_{p2}-1}p^3+\frac{a_1+k_{p1}T_{пд}}{k_{p2}-1}p^2+\frac{a_2+k_{p1}+k_{p2}T_{пд}}{k_{p2}-1}p+1\right]}, \quad (2)$$

где $k_{p2}=k_пk_{пд}k_{оу}k_{ос}$.

Условие устойчивости системы третьего порядка по критерию Гурвица [2]:

$$\left.\begin{aligned}&k_{p2}-1\succ 0;\\&\left(a_1+k_{p1}T_{пд}\right)\left(a_2+k_{p1}+k_{p2}T_{пд}\right)-a_0(k_{p2}-1)\succ 0.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Система (3) позволяет найти граничные с точки зрения устойчивости значения коэффициентов передачи пропорционально-дифференциального $k_{пд}$ и пропорционального $k_п$ регуляторов. Подставляя значения k_{p1}, k_{p2} и переходя в (3) к равенствам, получим следующую систему уравнений относительно переменных $k_{пд}$ и $k_п$:

$$\left.\begin{aligned}&k_nk_{пд}=\frac{1}{k_{оу}k_{ос}};\\&(k_{оу}k_{диф}k_{ос})^2T_{пд}k_{пд}^2+(k_{оу}k_{ос})^2k_{диф}T_{пд}^2k_nk_{пд}^2+k_{оу}k_{диф}k_{ос}\left(a_1+a_2T_{пд}\right)k_{пд}+\\&+k_{оу}k_{ос}(a_1T_{пд}-a_0)k_nk_{пд}+a_0+a_1a_2=0.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Подставляя первое уравнение (4) во второе, получим выражение для граничного значения коэффициента $k_{пд.\min}$ передачи пропорционально-дифференциального регулятора:

$$(k_{оу}k_{диф}k_{ос})^2 T_{пд} k_{пд.\min}^2 + k_{оу}k_{диф}k_{ос}\left[a_1 + (a_2 + T_{пд})T_{пд}\right]k_{пд.\min} + a_1(a_2 + T_{пд}) = 0\,.$$

Отсюда минимальное значение коэффициента передачи пропорционально-дифференциального регулятора:

$$k_{пд.\min} = \frac{-\left[a_1 + (a_2 + T_{пд})T_{пд}\right] + \sqrt{\left[a_1 + (a_2 + T_{пд})T_{пд}\right]^2 - 4a_1(a_2 + T_{пд})T_{пд}}}{2k_{оу}k_{диф}k_{ос}T_{пд}}\,.$$

Из первого уравнения (4) вытекает минимальное значение $k_{п.\min}$ коэффициента передачи пропорционального регулятора:

$$k_{п.\min} = \frac{1}{k_{пд}k_{оу}k_{ос}}\,.$$

Теоретически ограничений на максимальную величину $k_{пд}$ и $k_{п}$ в рамках рассматриваемой непрерывной модели системы управления не существует.

Для обоснованного выбора параметров настройки пропорционального и пропорционально-дифференциального регуляторов, а именно $k_{п}$, $k_{пд}$ и $T_{пд}$, разделим знаменатель передаточной функции (2) на числитель. В результате можно записать приближенное равенство:

$$W_2(p) \approx \frac{k_{p2}}{k_{ос}(k_{p2}-1)\left[\dfrac{a_0}{(k_{p2}-1)T_{пд}}p^2 + \dfrac{a_1 + k_{p1}T_{пд} - \dfrac{a_0}{T_{пд}}}{(k_{p2}-1)T_{пд}}p + 1\right]}\,. \qquad (5)$$

Значение постоянной времени $T_{пд}$ пропорционально-дифференциального регулятора будем выбирать исходя из обеспечения хорошего приближения в (5). При выполнении условия

$$k_{p2} \gg 1 \qquad (6)$$

выбор величины $T_{пд}$ следует из решения кубического уравнения

$$T_{пд}^3 - \frac{a_2}{\Delta_{отн}(k_{p2}-1)-1}T_{пд}^2 + \frac{a_1}{\Delta_{отн}(k_{p2}-1)-1}T_{пд} - \frac{a_0}{\Delta_{отн}(k_{p2}-1)-1} = 0\,, \qquad (7)$$

где $\Delta_{отн}$ – относительная погрешность полюса передаточной функции (2), компенсирующего соответствующий нуль.

Оптимальным будет являться действительное значение постоянной времени $T_{пд}$, получаемое при минимально возможной величине $\Delta_{отн}$. При этом в формуле (5) можно принять строгое равенство.

Теперь необходимо произвести обоснованный выбор величин $k_{пд}$ и $k_{п}$ соответствующих регуляторов и параметра дифференцирующего звена $k_{диф}$. Решение будем искать в таком виде, чтобы всегда $k_{пд} = k_n$, а характер переходного процесса по своим параметрам был близок к показателям качества технического оптимума [3]. Это позволит при простой технической реализации системы управления ($k_{пд}$ и k_n можно выбирать кратными двум) получить практически оптимальный по быстродействию переходный процесс.

Из передаточной функции (5) следует, что коэффициент демпфирования колебаний в рассматриваемой системе управления равен

$$\xi = \frac{a_1 + k_{p1}T_{пд} - \dfrac{a_0}{T_{пд}}}{2\sqrt{a_0(k_{p2}-1)T_{пд}}}. \tag{8}$$

Параметры регуляторов входят в коэффициенты передачи k_{p1}; k_{p2}. Приравнивая $k_{пд} = k_n$ в выражении (8), после несложных преобразований получим

$$k_{пд} = k_n = \frac{a_1 T_{пд} - a_0}{T_{пд}\left(2\xi\sqrt{k_{оу}k_{ос}a_0T_{пд}} - k_{оу}k_{диф}k_{ос}T_{пд}\right)}.$$

И в то же время можно записать:

$$k_{диф} = 2\xi\sqrt{\frac{a_0}{k_{оу}k_{ос}T_{пд}}} - \frac{a_1}{k_{пд}k_{оу}k_{ос}T_{пд}} + \frac{a_0}{k_{пд}k_{оу}k_{ос}T_{пд}^2}. \tag{9}$$

Выбирая $\xi = 0{,}7 \div 0{,}8$, по формуле (9) определяем необходимое значение $k_{диф}$, при котором $k_{пд} = k_n$ теоретически при любых их численных значениях. Очевидно, что чем больше величина коэффициентов передачи $k_{пд}$ и k_n, тем выше быстродействие системы управления.

Двухконтурная система управления будет обладать статической ошибкой. Для исключения этого недостатка необходимо ввести дополнительный контур, в результате чего получается трехконтурная система управления (рис. 2).

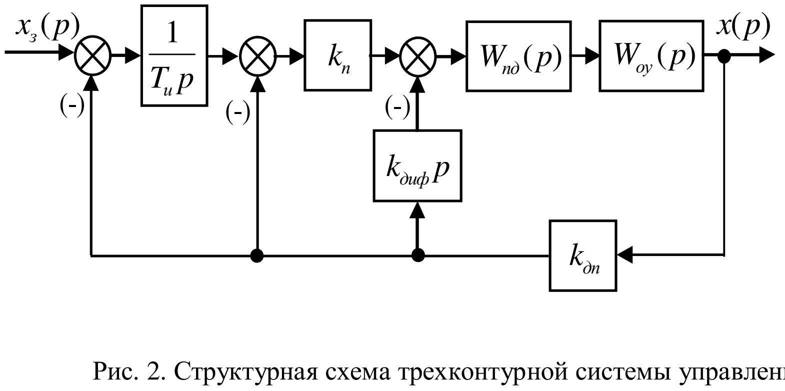

Рис. 2. Структурная схема трехконтурной системы управления неустойчивым объектом третьего порядка

Она содержит интегральный регулятор во внешнем контуре, который компенсирует все помехи, охваченные обратной связью.

Передаточная функция замкнутой трехконтурной системы управления неустойчивым объектом (1)

$$W_3(p)=\frac{(T_{пд}p+1)}{k_{ос}\left[\frac{a_0T_и}{k_{p2}}p^4+\frac{(a_1+k_{p1}T_{пд})T_и}{k_{p2}}p^3+\frac{\left(a_2+k_{p1}+k_{p2}T_{пд}\right)T_и}{k_{p2}}p^2+\left(\frac{k_{p2}-1}{k_{p2}}T_и+T_{пд}\right)p+1\right]},$$

где $T_и$ – постоянная времени интегрального регулятора, представляет собой динамическое звено четвертого порядка, условие устойчивости которого определяется системой неравенств

$$\left.\begin{array}{l} k_{p2}-1\succ 0; \\ \\ (k_{p2}-1)\left[(a_1+k_{p1}T_{пд})\left(a_2+k_{p1}+k_{p2}T_{пд}\right)-a_0(k_{p2}-1)\right]T_и^2+ \\ \left\{\begin{array}{l} k_{p2}T_{пд}(a_1+k_{p1}T_{пд})\left(a_2+k_{p1}+k_{p2}T_{пд}\right)- \\ -2a_0k_{p2}(k_{p2}-1)T_{пд}-k_{p2}(a_1+k_{p1}T_{пд})^2 \end{array}\right\}T_и-a_0k_{p2}^2T_{пд}^2\succ 0. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Переходя во втором условии устойчивости (10) к равенству, получим квадратное уравнение для определения граничного значения постоянной времени $T_{и.гр}$ интегрального регулятора

$$aT_{и.гр}^2+bT_{и.гр}+c=0, \tag{11}$$

где $a=(k_{p2}-1)\left[(a_1+k_{p1}T_{пд})\left(a_2+k_{p1}+k_{p2}T_{пд}\right)-a_0(k_{p2}-1)\right]$; $c=-a_0k_{p2}^2T_{пд}^2$;

$b=k_{p2}T_{пд}(a_1+k_{p1}T_{пд})\left(a_2+k_{p1}+k_{p2}T_{пд}\right)-2a_0k_{p2}(k_{p2}-1)T_{пд}-k_{p2}(a_1+k_{p1}T_{пд})^2$.

Из (11) следует, что при выбранных параметрах пропорционального и пропорционально-дифференциального регуляторов (т. е. при известных значениях k_{p1} и k_{p2}) минимальная величина постоянной времени интегрального регулятора, при которой система находится на границе устойчивости, определяется выражением

$$T_{и.гр}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{12}$$

Для обеспечения показателей качества переходных процессов, близких к техническому оптимуму, необходимо выбирать постоянную времени $T_и$ интегрального регулятора из соотношения

$$T_и=(4\div 5)T_{и.гр}. \tag{13}$$

Статическая точность трехконтурной системы управления неустойчивым объектом определяется только погрешностью датчика обратной связи.

Вариация параметров настройки пропорционального и пропорционально-дифференциального регуляторов приводит к изменению $T_{и.гр}$. Чем больше значение коэффициентов передачи $k_{пд}$ и $k_п$, тем меньше может быть величина $T_и$. Анализ выражений (11), (12) и (13) показывает, что в рассматриваемой непрерывной модели трехконтурной системы управления теоретически нет ограничений на минимальное значение постоянной времени $T_и$ и достижимое быстродействие.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Макаричев Ю.А., Стариков А.В.* Теоретические основы расчета и проектирования радиальных электромагнитных подшипников. – М.: Энергоатомиздат, 2009. – 150 с.
2. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1975. – 768 с.
3. *Терехов В.М., Осипов О.И.* Системы управления электроприводов: Учебник для студ. высш. учеб. заведений / Под ред. В.М. Терехова. – М.: Академик, 2005. – 304 с.

Статья поступила в редакцию 14 октября 2013 г.

STRUCTURAL AND PARAMETRIC SYNTHESIS OF UNSTABLE- OBJECT CONTROL SYSTEMS

A.V. Starikov, S.L. Lisin

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The synthesis of a control system for a third-order unstable object is discussed. A method for structural construction of an unstable-object control system is offered. Regulator transfer functions to ensure high speed are found.

Keywords: *control system, function block diagram, transfer function, unstable control object, proportional-plus-derivative action control, integral controller, stability conditions.*

Alexander V. Starikov (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.
Sergey L. Lisin, Head of HR.