УДК 681.391:543/545

# ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ РАЗДЕЛЕНИЯ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕЙВЛЕТ-РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

***Р.Т. Сайфуллин***

Самарский государственный технический университет
443076, Самара, ул. Молодогвардейская, 244

*Приведен алгоритм разделения совмещенных сигналов с целью повышения достоверности определения качественного и количественного состава многокомпонентных смесей.*

***Ключевые слова**: разделение сигналов, вейвлет-разложение, итерационный алгоритм.*

Одним из часто применяемых видов обработки сигналов аналитических приборов является разделение сигналов на компоненты одинаковой формы, но с различными параметрами. Типичный пример – разделение совмещенных пиков хроматографического сигнала. Если рассматривать аналитический прибор как линейную систему с известной аппаратной функцией, то задача разделения сигналов сводится к решению интегрального уравнения типа свертки [1], которое в символической форме может быть записано в виде

$$y = z * h + n\,. \tag{1}$$

Здесь $*$ – обозначение свертки, $h$ – аппаратная функция прибора, $y$ – выходной сигнал аналитического прибора, $z$ – входной сигнал, $n$ – высокочастотная помеха с нулевым средним и дисперсией $\sigma_n^2$.

Решение задачи заключается в нахождении оценки $\hat{z}$ по экспериментально зарегистрированному сигналу $y$. Задача обращения (1) является некорректно поставленной [2], для ее решения используются регуляризирующие алгоритмы, зависящие от некоторого параметра регуляризации (обычно одного), выбором которого достигается приемлемое регуляризированное решение.

В данной работе для получения устойчивого решения используется вейвлет-регуляризация, в основе которой лежит тот факт, что энергия полезного сигнала и помехи распределяется по масштабам разложения различным образом [3]. Появляется возможность «разделить» сигнал и помеху. Для этого производится пороговая обработка коэффициентов разложения [4]. Здесь регуляризирующий множитель определяется индивидуально для каждого масштаба разложения, что позволяет получить лучшие результаты.

Перейдем к конкретному итерационному алгоритму разрешения сигналов. Итерационная последовательность оценок $\hat{z}^{(k)}$ строится в следующем виде [1]:

$$\hat{z}^{(k+1)} = \hat{z}^{(k)} + \gamma[y - h * \hat{z}^{(k)}]\,, \tag{2}$$

где $\hat{z}^{(k)}$ – оценка решения на $k$-той итерации; $\gamma$ – коэффициент релаксации. В качестве начальной оценки решения обычно принимается зарегистрированный на выходе прибора сигнал: $\hat{z}^{(0)} = y$.

---

*Раухат Талгатович Сайфуллин (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Информационно-измерительная техника».*

Рассмотрим текущую невязку:

$$\hat{r}^{(k)} \equiv y - h * \hat{z}^{(k)} \equiv n + h * (z - \hat{z}^{(k)}) . \qquad (3)$$

Подавление помехи заключается в том, чтобы разделить вклады $n$ и $h * (z - \hat{z}^{(k)})$ в $\hat{r}^{(k)}$. Таким образом, если сначала разделить коэффициенты вейвлет-преобразования невязки (3) на те, которые обусловлены помехой и те, которые несут информацию о сигнале, а затем отбросить помеховую составляющую, то можно получить регуляризированную невязку:

$$\tilde{r}^{(k)} \approx h * (z - \hat{z}^{(k)}) .$$

Подставляя в итерационную процедуру (2) невязку $\tilde{r}^{(k)}$ вместо $r^{(k)}$, получим регуляризированную итерационную схему, которая будет сходиться к $z$.

Для получения регуляризированной невязки $\tilde{r}^{(k)}$ на каждой итерации $k$ осуществляется вейвлет-представление невязки $r$ в виде приближения $\hat{r}_j$ из двух составляющих – грубой (аппроксимирующей) $\hat{r}_{j-1}$ и детализирующей $\hat{r}^d_{j-1}$, с последующим их уточнением итерационным методом:

$$\hat{r}_j = \hat{r}_{j-1} + \hat{r}^d_{j-1} = \sum_{i \in Z} a_{j-1,i} \varphi_{j-1,i} + \sum_{i \in Z} d_{j-1,i} \psi_{j-1,i} , \qquad (4)$$

где $j$ характеризует уровень разрешения; $\varphi_{j-1,i}, \psi_{j-1,i}$ – соответственно скейлинг-функция и вейвлет-функция (детализирующая); $\{a_{j-1,i}\}$, $\{d_{j-1,i}\}$ – наборы аппроксимирующих и детализирующих коэффициентов разложения $j-1$ уровня разрешения; $Z = \{\ldots,-1,0,1,\ldots\}$ – множество целых чисел. В качестве начального набора коэффициентов $a_{0,i}$ выбирается массив значений невязки $r, a_{0,i} = r$.

Повторяя процедуру $m$ раз, $m = \overline{1,M}$, разлагая каждый раз сглаженную функцию $\hat{r}_{j-m}$ на еще более сглаженную часть $\hat{r}_{j-m-1}$ и детализирующую часть $\hat{r}^d_{j-m-1}$, получаем вейвлет-разложение аппроксимации $j$-того уровня разложения $\hat{r}_j$ для глубины разложения $m$:

$$\hat{r}_j = \hat{r}_{j-m} + \hat{r}^d_{j-m} + \ldots + \hat{r}^d_{j-1} ; \qquad (5)$$

$$\hat{r}_j = \sum_{i \in Z} a_{j-m,i} \varphi_{j-m,i} + \sum_{i \in Z} d_{j-m,i} \psi_{j-m,i} + \ldots + \sum_{i \in Z} d_{j-1,i} \psi_{j-1,i} . \qquad (6)$$

Вейвлет-разложения (5), (6) можно изобразить в виде следующей схемы нахождения коэффициентов:

$$\hat{r}_j \to a_0 \to \{a_1, d_1\} \to \{a_2, d_2, d_1\}, \to \ldots \{a_M, d_M, d_{M-1}, \ldots, d_1\} .$$

Таким образом, на каждой итерации находится одно-, двухуровневое или более глубокое разложение невязки $r^{(k)}$. Затем к каждому из коэффициентов детализации уровня $j$ применяется процедура порогового удаления. В соответствии с жесткой пороговой обработкой все коэффициенты $d_{j,i}$ уровня $j$, большие или равные порогу $Q_j$, сохраняются неизменными, а прочие, не удовлетворяющие данному условию, отбрасываются: $\tilde{d}_{j,i} = \alpha(|d_{j,i}|) d_{j,i}$, где $\alpha(|d_{j,i}|)$ – множитель, определяющий жесткий порог: $\alpha\left(\left|d_{j,i}\right|\right)=0$, если $\left|d_{j,i}\right|<Q_j$; $\alpha\left(\left|d_{j,i}\right|\right)=1$, если $\left|d_{j,i}\right|\geq Q_j$.

Использование мягкой пороговой обработки подразумевает пересчет коэффициентов детализации $d_{j,i}$ следующим образом: $\widetilde{d}_{j,i}=sign\left(d_{j,i}\right)\cdot\left(\left|d_{j,i}\right|-Q\right)$, где $Q$ – некоторое пороговое значение. В этом случае наряду с обращением в 0 коэффициентов $d_{j,i}$, содержащих лишь помеху, происходит уменьшение коэффициентов детализации на величину $Q$, что соответствует шумоподавлению в информативных коэффициентах.

В случае использования процедуры пороговой обработки разложение невязки в ряд по скейлинг- и вейвлет-функциям имеет вид

$$\widetilde{r}=\sum_i a_{j,i}\varphi_{j,i}+\sum_j\sum_i \widetilde{d}_{j,i}\psi_{j,i},$$

где $\left\{\widetilde{d}_{j,i}\middle| j,i\in Z\right\}$ – множество коэффициентов детализации невязки $r$, прошедших процедуру пороговой обработки.

Проведены вычислительные эксперименты по разрешению сигналов аналитических приборов. При использовании рассмотренного метода разрешения сигналов с вейвлет-подавлением помехи достигается высокая устойчивость к воздействию погрешности регистрации выходного сигнала анализатора. Метод вполне работоспособен при высоком уровне помехи, когда другие методы регуляризации не дают удовлетворительных результатов. Следует заметить, что процедура вейвлет-преобразования – ресурсоемкая процедура, а в задаче повышения разрешения сигналов она выполняется на каждой итерации. Алгоритм обработки сигналов, реализующий данный метод, требует использования достаточно производительной ЭВМ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Галкин В.Я., Сайфуллин Р.Т.* Итерационный алгоритм восстановления сигналов при наличии ограничений // Прямые и обратные задачи математической физики. – М.: МГУ, 1991. – С. 45-48.
2. *Тихонов А.Н., Уфимцев М.В.* Статистическая обработка результатов экспериментов. – М.: МГУ, 1998. – 174 с.
3. *Тимановский А.Л.* Численные методы восстановления изображений в системах пассивного радиовидения: Препринт учебно-научного центра магнитной томографии и спектроскопии МГУ. – М.: ЦМТС МГУ, 2007. – 20 с.
4. *Раткевич С.С.* Вейвлет-анализ событий с малым энерговыделением в ионизационных детекторах // Вестник Харьковского университета. – 2006. – № 746. – С. 23-42.

*Статья поступила в редакцию 4 февраля 2013 г.*

## ITERATIVE ALGORITHM FOR SEPARATING SIGNALS USING WAVELET REGULARIZATION

***R.T. Sayfullin***

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaja st., Samara, 443100

*An algorithm for separation of the combined signals in order to improve the reliability of determining the qualitative composition of multi-component mixtures is considered.*

***Keywords:*** *separation of signals, a wavelet-decomposition, iterative algorithm.*

---

*Rauhat T. Sayfullin (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.*