УДК 681.51

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА В УСЛОВИЯХ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТА*

И.С. Левин

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
E-mail: levin_ilja@yahoo.com

Определен вид передаточной функции объекта управления, в Simulink построены модели оптимальных по быстродействию систем управления различной структуры. В MATLAB выполнены все необходимые расчеты для заданных исходных данных, произведена оценка эффективности замкнутой системы управления с идентификатором состояния по сравнению с замкнутой системой управления в условиях полного объема информации об объекте.

Ключевые слова: *система с распределенными параметрами, индукционный нагрев, управление в условиях интервальной неопределенности, компьютерное моделирование, сравнительный анализ, регулятор с идентификатором.*

С целью апробации полученного в [1] оптимального по быстродействию алгоритма управления процессом индукционного нагрева в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта, а также оценки его эффективности по сравнению с алгоритмом управления, полученным в условиях полной информации об объекте, было произведено компьютерное моделирование в пакете прикладных программ MATLAB с приложениями Simulink и Stateflow, предназначенном для инженерных и научных расчетов.

Передаточная функция объекта управления

Процесс индукционного нагрева металлических изделий цилиндрической формы с управляющим воздействием по мощности внутреннего тепловыделения *u(t)* описывается в первом приближении линейным, неоднородным и пространственно-одномерным уравнением теплопроводности в цилиндрических координатах следующего вида [2]:

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} = a\left(\frac{\partial\theta^2(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right) + \frac{1}{c\gamma}F_{b1}\left(\frac{x}{R},\nu\right)u(t);\ x\in[0,R], t\in[0,t_1] \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\lambda\frac{\partial\theta(R,t)}{\partial x} + \alpha\theta(R,t) = \alpha\theta_C(t);\ \frac{\partial\theta(0,t)}{\partial x} = 0; \quad (2)$$

$$\theta(x,0) = \theta_0 = const, \quad (3)$$

где на управляющее воздействие *u(t)* по мощности нагрева накладывается следующее ограничение:

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12–08-00277-а).

Илья Сергеевич Левин, аспирант.

$$0 \le u(t) \le u_{\max}\ \forall\, t \in [0, t_1], u_{\max} = \frac{P_{0\max}}{R}. \tag{4}$$

Здесь R – радиус цилиндра; c, γ – удельная теплоемкость и плотность материала; a – коэффициент температуропроводности нагреваемого изделия; λ, α – коэффициенты теплопроводности и конвективной теплопередачи; $\theta(x,t)$ – температурное поле нагреваемого металлического изделия, изменяющегося во времени t по радиальной координате x; θ_0 – равномерное начальное распределение температур; $\theta_C(t)$ – температура окружающей среды; $P_{0\max}$ – максимальная поверхностная плотность мощности нагрева; $F_{b1}\left(\frac{x}{R}, \nu\right)$ – функция пространственного распределения по радиусу цилиндра внутренних источников тепла, определяемая по выражению

$$F_{b1}\left(\frac{x}{R}, \nu\right) = \nu \frac{\operatorname{ber}'^2\left(\nu \frac{x}{R}\right) + \operatorname{bei}'^2\left(\nu \frac{x}{R}\right)}{\operatorname{ber}\nu\ \operatorname{ber}'\nu + \operatorname{bei}\nu \operatorname{bei}'\nu},\ \nu = R\sqrt{2\pi\mu_a f\sigma}, \tag{5}$$

где f – частота питающего индуктор тока;

σ – электропроводность нагреваемого материала;

μ_a – абсолютная магнитная проницаемость нагреваемого материала;

$\operatorname{ber} z, \operatorname{bei} z, \operatorname{ber}' z, \operatorname{bei}' z$ – функции Кельвина и их первые производные.

Объект управления (1)-(4) представляет собой при сосредоточенном внутреннем управлении $u(t)$ распределенный x-блок [2] с передаточной функцией

$$W_x(p) = L_t\left\{\int_o^t \left[\int_0^R G(x, \xi, t-\tau) F_{b1}\left(\frac{\xi}{R}, \nu\right) d\xi\right] u(\tau) d\tau\right\}, \tag{6}$$

где L_t – оператор преобразования Лапласа;

$G(x, \xi, t-\tau)$ – функция Грина краевой задачи (1)-(3).

Выражение для функции Грина, полученное методом конечных интегральных преобразований [2], имеет следующий вид:

$$G(x, \xi, t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\mu_n, x)\varphi_n(\mu_n, \xi) r(\xi) G_n^*(\mu_n, t-\tau). \tag{7}$$

Здесь $r(\xi) = \frac{\xi}{a}$ – весовая функция; $\varphi_n(\mu_n, x)$ и $\varphi_n(\mu_n, \xi)$ – нормированные собственные функции, определяемые по следующим выражениям:

$$\varphi_n(\mu_n, x) = \frac{1}{E_n}\varphi_n^*(\mu_n, x); \varphi_n(\mu_n, \xi) = \frac{1}{E_n}\varphi_n^*(\mu_n, \xi), \tag{8}$$

где $E_n^2 = \int_0^R J_0^2\left(\eta_n \frac{x}{R}\right) r(x) dx = R^2 J_0^2(\eta_n)\left[\frac{1}{2} + \frac{Bi^2}{2\eta_n^2}\right]$ – квадрат нормы собственных функций;

$\varphi_n^*(\mu_n, x) = J_0\left(\eta_n \frac{x}{R}\right)$ и $\varphi_n^*(\mu_n, \xi) = J_0\left(\eta_n \frac{\xi}{R}\right)$, $J_0(z)$ – функции Бесселя первого рода нулевого порядка;

$\mu_n^2 = \dfrac{a\eta_n^2}{R^2}$ – собственные числа;

η_n, $n = 1,2,...$ – бесконечно возрастающая последовательность корней уравнения $BiJ_0(\eta_n) - \eta_n J_1(\eta_n) = 0$;

$J_1(\eta) = -\dfrac{dJ_0(\eta)}{d\eta}$ – функция Бесселя первого порядка;

$Bi = \dfrac{\alpha R}{\lambda}$ – безразмерный критерий Био [2].

Функция $G_n^*(\mu_n, t-\tau)$ для рассматриваемого случая имеет следующий вид:

$$G_n^*(\mu_n, t-\tau) = e^{-\mu_n^2 \cdot (t-\tau)}. \qquad (9)$$

Передаточная функция x-блока (6) с учетом (7)-(9) принимает следующий вид:

$$W_x(x,p) = \sum_1^{\infty} \frac{2}{c\gamma R^2} \cdot \frac{K_n}{T_n p + 1}, \qquad (10)$$

где $K_n = \dfrac{1}{\mu_n^2} \cdot \dfrac{\eta_n^2 J_0\left(\eta_n \dfrac{x}{R}\right)\left(\int\limits_0^R \xi J_0\left(\eta_n \dfrac{\xi}{R}\right) F_{b1}\left(\dfrac{\xi}{R}, v\right) d\xi\right)}{J_0^2(\eta_n)\left(\eta_n^2 + Bi^2\right)}; T_n = \dfrac{1}{\mu_n^2}.$

По виду выражения (10) можно сделать вывод, что объект управления (1)-(4) в структурном отношении представляет собой бесконечное число параллельно соединенных типовых апериодических звеньев. Очевидно, что промоделировать такую систему невозможно, поэтому необходимо провести процедуру усечения или, другими словами, представить объект укороченной структурой. Следует помнить, что такая процедура приводит к искажению представления о свойствах распределенного объекта, однако ее использование возможно с некоторой заданной точностью.

Одним из вариантов определения количества учитываемых звеньев является выбор количества звеньев по виду переходной функции объекта на отрезке времени $[0;0.01\varphi]$, где $\varphi = \dfrac{at}{R^2}$ – безразмерное время. Согласно ему выбирается такое количество звеньев, при превышении которого картина теплового поля на обозначенном отрезке времени практически перестает меняться.

Рассмотрим в качестве примера процесс индукционного нагрева цилиндрических слитков из сплава Д16 на промышленной частоте тока 50 Гц, характеристики которых указаны в табл. 1, для исходных данных, представленных в табл. 2.

Таблица 1

Характеристики нагреваемых заготовок

Параметр	Значение
$2R$, толщина заготовки, м	0,16
λ, коэффициент теплопроводности, Вт/(м · ºС)	130
γ, плотность материала, кг/м^3	2800
c, теплоемкость, Дж/(кг · ºС)	922
a, коэффициент температуропроводности, м^2/с	$49 \cdot 10^{-6}$

Таблица 2

Исходные данные для процесса индукционного нагрева

Параметр	Значение
v, характерный параметр	5
Bi, критерий Био	0,04
θ_0, начальная температура, ºС	300
θ^{**}, конечная температура, ºС	460
$P_{0\max}$, максимальная поверхностная плотность мощности нагрева, кВт/м^2	130

Экспериментальны путем, опираясь на предложенный выше метод, было выяснено, что вполне достаточно учитывать 30 апериодических звеньев.

Сравнительный анализ системы управления с детерминированным регулятором и системы управления с автокоррекцией коэффициентов обратных связей

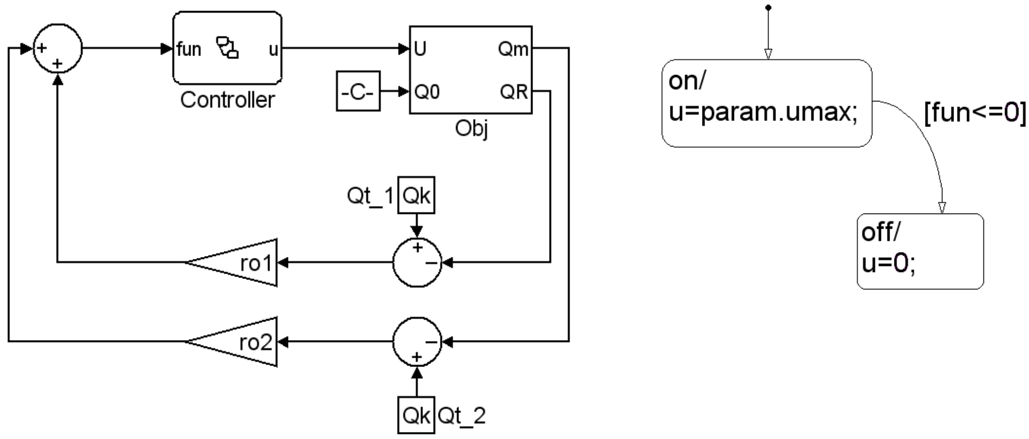
Для количественной оценки преимущества предложенной в [1] оптимальной по быстродействию системы управления процессом индукционного нагрева в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта по сравнению с системой управления, синтезированной в условиях полной информации об объекте [3], были построены их Simulink-модели и проведен сравнительный анализ результатов моделирования.

Модель оптимальной по быстродействию системы управления с детерминированным регулятором, в роли которого выступает блок Controller, реализованный в Stateflow в форме диаграммы состояний и переходов, представлена на рис. 1.

Блоки ro1 и ro2 содержат значения коэффициентов в обратных связях. Блоки Qt_1 и Qt_2 содержат результирующие значения температур (Qk) в конце оптимального процесса. Для исходных данных, представленных в табл. 1 и 2, были получены следующие значения этих параметров: ro1 = 1; ro2 = 0,927; Qk = 459,488 ºС. Расчетные значения всех указанных величин получены по методике, предложенной в [3]. Блок Obj представляет собой модель объекта с распределенными параметрами (1)-(4), представленного усеченными передаточными функциями, описывающими его поведение на поверхности нагреваемой заготовки и в ее центре, и реализованного как LTI-модель в среде MATLAB в соответствии с (10).

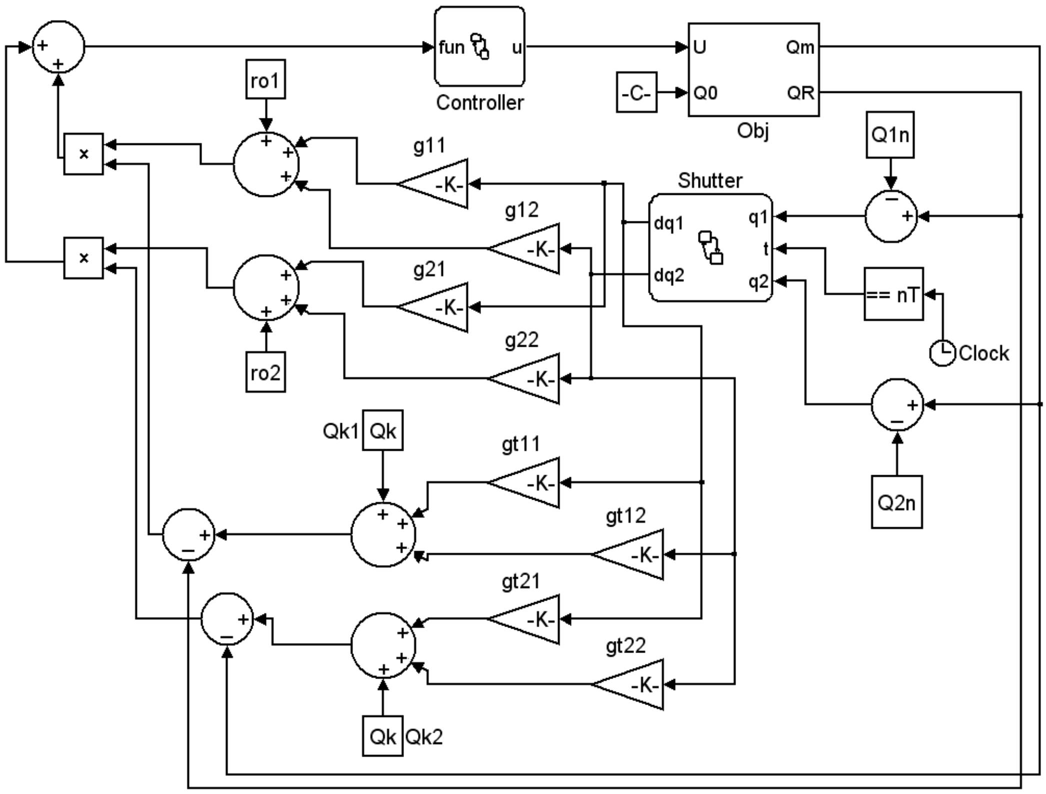
Модель предложенной в [1] оптимальной системы управления, структура которой дополнена идентификатором реализуемых величин неопределенных параметров, представлена на рис. 2.

Блоками g11, g12 и g21, g22, в которых содержатся значения коэффициентов gamma11, gamma12, gamma21, gamma22, реализована автоматическая коррекция коэффициентов обратных связей ro1, ro2. Коррекция значений заданных распределений температурного поля Qk1, Qk2 реализуется с помощью блоков gt11, gt12 и gt21, gt22, содержащих значения коэффициентов gammaT11, gammaT12, gammaT21, gammaT22. Параметры Q1n и Q2n содержат значения температур на поверхности заготовки и в ее центре в окрестности некоторой номинальной точки. Блок Shutter (рис. 3) играет роль устройства, срабатывающего только в тот момент, когда время таймера Clock совпадает с некоторым заданным моментом времени nT, выбранный ближе к началу интервала, лежащего в пределах длительности первого интервала постоянства оптимального программного управления Δ_1^0 и фиксирующего в этот момент времени разницу наблюдаемого значения температуры и ее номинального значения. Все значения коэффициентов и параметров заранее рассчитываются в MATLAB по соответствующим формулам, полученным в [1].



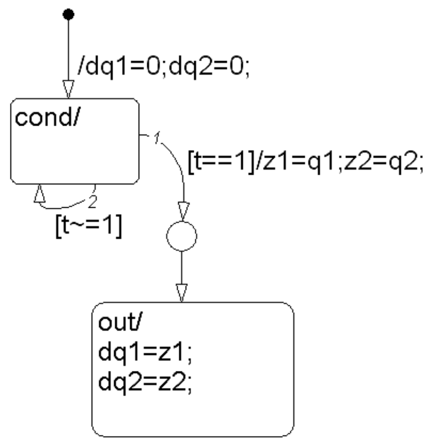
а *б*

Р и с. 1. Simulink-модель (а) системы оптимального по быстродействию управления для детерминированной задачи и Stateflow-модель (б) регулятора



Р и с. 2. Simulink-модель оптимальной по быстродействию системы управления с автоматической коррекцией коэффициентов обратных связей

Для рассматриваемого примера, исходные данные которого приняты за номинальные и даны в табл. 2, найдены следующие значения коэффициентов: gamma11 = gamma12 = 0; gamma21 = -0,3643; gamma22 = 0,3703; gammaT11 = 0,7310; gammaT12 = -0,7429; gammaT21 = 0,7310; gammaT22 = -0,7429. Значения температур в номинальных точках $\mathrm{Q1n} = 346\ {}^{\circ}\mathrm{C};\ \mathrm{Q2n} = 321\ {}^{\circ}\mathrm{C}$ в момент времени nT = 30 с.



Р и с. 3. Реализация алгоритма функционирования блока Shutter в Stateflow

Был произведен сравнительный анализ полученных моделей по следующему алгоритму:

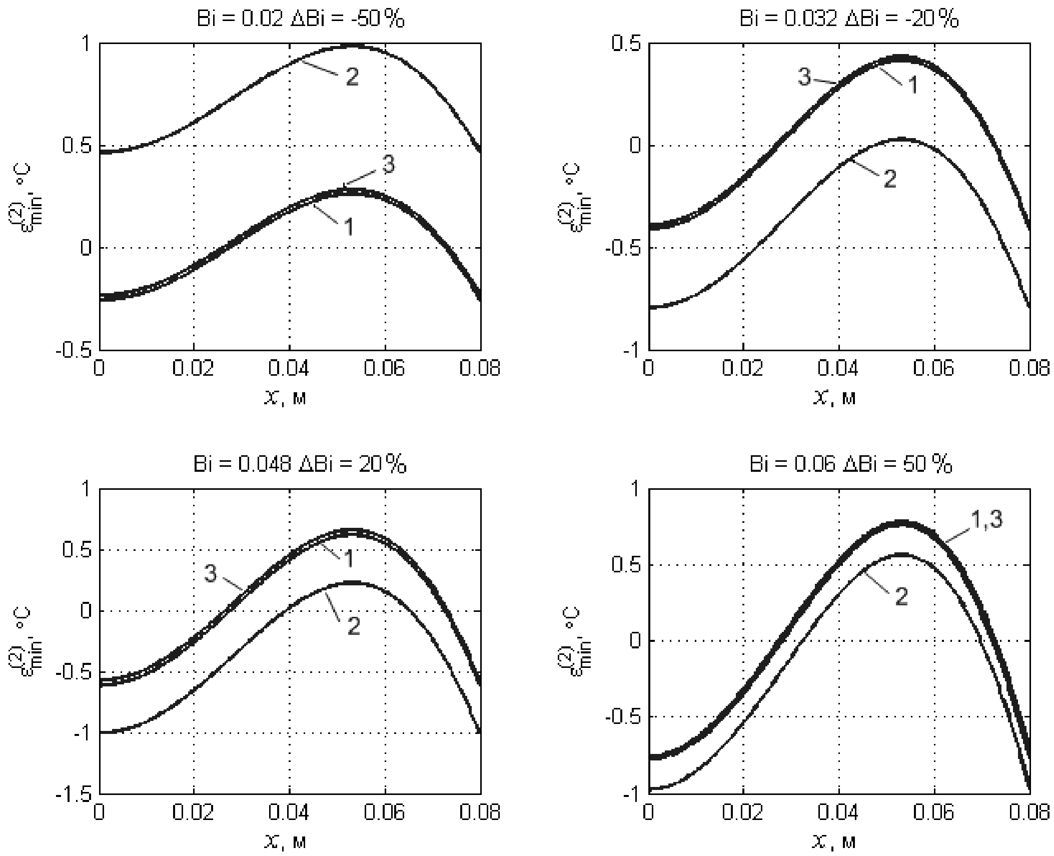
1) для объекта с измененными параметрами находится точное оптимальное по быстродействию программное управление;

2) для этого же объекта производится моделирование в системе управления с детерминированным регулятором;

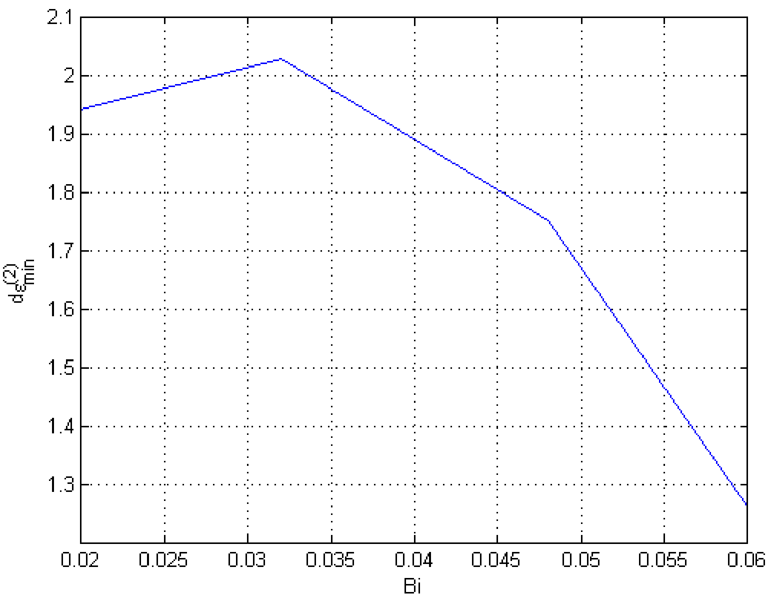
3) объект с измененными параметрами включается в модель системы управления, структура которой дополнена идентификатором.

Для наглядного представления результата строятся кривые результирующего температурного распределения, а оценка эффективности производится путем сравнения полученных значений минимакса $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ в замкнутых оптимальных системах управления с эталонным, найденном на первом этапе алгоритма.

На рис. 4 представлены графики распределения температуры по радиусу заготовки при изменении параметра Bi. Рассматриваются четыре ситуации, когда $Bi = 0{,}5Bi^*; Bi = 0{,}8Bi^*; Bi = 1{,}2Bi^*; Bi = 1{,}5Bi^*$, где $Bi^* = 0{,}04$ – значение коэффициента для номинального случая. Из графиков видно, что конечное распределение температур оптимальной по быстродействию САУ с автокоррекцией коэффициентов обратных связей (линия 3), в отличие от конечного распределения температур (линия 2) оптимальной по быстродействию системы управления с фиксированными коэффициентами, рассчитанными для номинального случая (когда $Bi = Bi^*$), практически совпадает с эталонным распределением температуры (линия 1).



Р и с. 4. Совмещенные графики результирующих температурных распределений при разных значениях критерия Био



Р и с. 5. График зависимости $d\varepsilon_{\min}^{(2)}(Bi)$

Из графика зависимости $d\varepsilon_{\min}^{(2)} = \left| \frac{\varepsilon_{2\min}^{(2)}}{\varepsilon_{3\min}^{(2)}} \right|$ от Bi, изображенного на рис. 5, где $\varepsilon_{2\min}^{(2)}, \varepsilon_{3\min}^{(2)}$ – значения минимаксов, полученных на втором и третьем этапах алгоритма сравнительного анализа соответственно, видно, что система автоматического управления (САУ) с алгоритмами автоматической коррекции коэффициентов обратной связи в среднем ближе к эталонному значению в 1,75 раза, что доказывает ее эффективность по сравнению с САУ в детерминированной задаче.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Левин И.С., Рапопорт Э.Я.* Синтез оптимальной по быстродействию системы управления процессом индукционного нагрева в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2012. – № 4 (36). – С. 46-57.
2. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2003. – 299 с.
3. *Рапопорт Э.Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2009. – 677 с.

Статья поступила в редакцию 7 июля 2013 г.

MODELING OF TIME-OPTIMAL CONTROL SYSTEM OF THE INDUCTION HEATING PROCESSES WITH INTERVAL OF UNCERTAINTY CHARACTERISTICS OF THE OBJECT

I.S. Levin

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100
E-mail: levin_ilja@yahoo.com

The aim of this paper is to show the effectiveness of an optimal control system with identifier of uncertainty characteristics of the object in comparison with the control system where the all characteristics of the object are supposed to be known.

Keywords: *distributed parameter system, induction heating, control with interval uncertainty of characteristics of the object, computer modeling, comparative analysis, controller with an identifier.*

Ilia S. Levin, Postgraduate Student.