

# Машиностроение

УДК 621.9.06, 51-74

## МОДЕЛЬ ОПОРЫ ШПИНДЕЛЬНОГО УЗЛА НА ПОДШИПНИКАХ КАЧЕНИЯ

*Э.С. Гаспаров, А.Ф. Денисенко, Л.Б. Гаспарова*

Самарский государственный технический университет  
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

*Рассматривается вопрос построения математической модели опоры шпиндельного узла, которая сможет описать механизм образования сигнала вибрации, привязав его к параметрам технического состояния.*

**Ключевые слова:** *математическая модель, преобразование Хуанга – Гильберта, радиальный шарикоподшипник, дисбаланс, вибрация.*

Математическая модель, которая наилучшим образом установила бы связь информационного сигнала с параметрами технического состояния механического узла, позволит более успешно разрабатывать методы диагностирования зарождающихся дефектов на этапе эксплуатации, требующие большей глубины диагностирования, чем методы диагностики на стадии изготовления и сборки, большее количество которых основано на октавном и дробно-октавном анализе спектра энергии сигнала. Поэтому разработка математической модели опоры шпиндельного узла, которая аналитически описывала бы механизм образования сигнала вибрации, привязав его к параметрам технического состояния, является актуальной задачей и в настоящее время. Возможно, такая математическая модель позволит эффективно применить к сигналам вибрации преобразование Хуанга – Гильберта [1], использующее адаптивное разложение сигналов на физически значимые составляющие, а также улучшить эффективность применяемых в настоящее время методов анализа.

На рис. 1 приведены геометрическая модель (а) и обобщенная расчетная схема (б) опоры высокоскоростного шлифовального шпинделя. В модели рассматривается радиальный шарикоподшипник, но при необходимости результаты можно перенести и на модель радиально-упорного шарикоподшипника.

Модель имеет одну неподвижную и несколько подвижных систем координат, число которых равно количеству шариков в обойме. Подвижные системы координат вращаются относительно неподвижной с угловой скоростью, равной скорости вращения сепаратора, т. е. геометрический центр шарика лежит на оси соответствующей

---

*Эрик Сергеевич Гаспаров, ассистент кафедры «Автоматизация производства и управления транспортными системами».*

*Александр Федорович Денисенко (д.т.н., проф.), заведующий кафедрой «Автомобили и станочные комплексы».*

*Лана Багратовна Гаспарова (к.п.н., доц.), доцент кафедры «Автомобили и станочные комплексы».*

щей подвижной системы координат. Дорожкой внутреннего кольца подшипника является поверхностью ротора, что характерно для шлифовальных шпинделей.

В модели приняты следующие допущения: отсутствует скольжение шариков, профиль беговых дорожек неизменен, угол контакта постоянен.

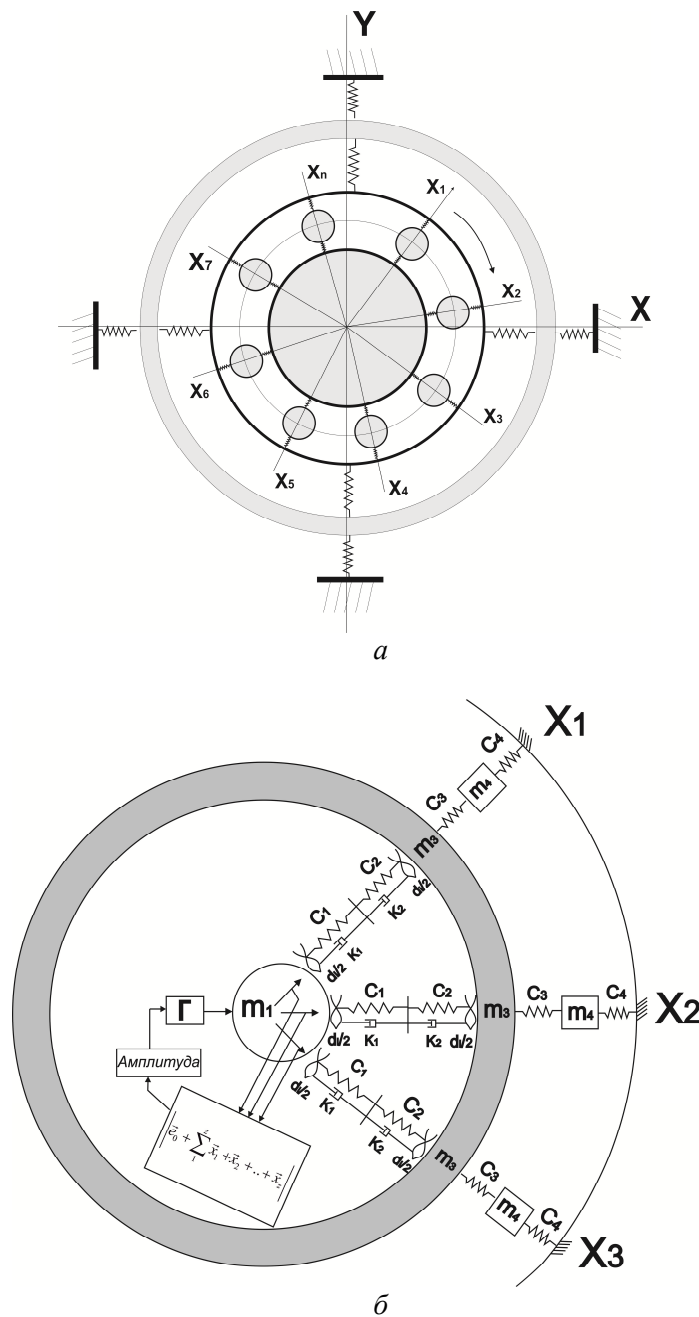


Рис. 1. Геометрическая модель (а) и расчетная схема (б) подшипниковой опоры шпиндельного узла

Расчетная схема на рис. 1 (б) учитывает влияние обратной связи по амплитуде, т. е. влияние перемещения ротора на амплитуду периодической возмущающей силы, вызванной начальным дисбалансом шпинделя.

Рассмотрим механическую систему вдоль одной из подвижных осей. Механическая система представляет собой четыре упруго связанные сосредоточенные массы (рис. 2, а).

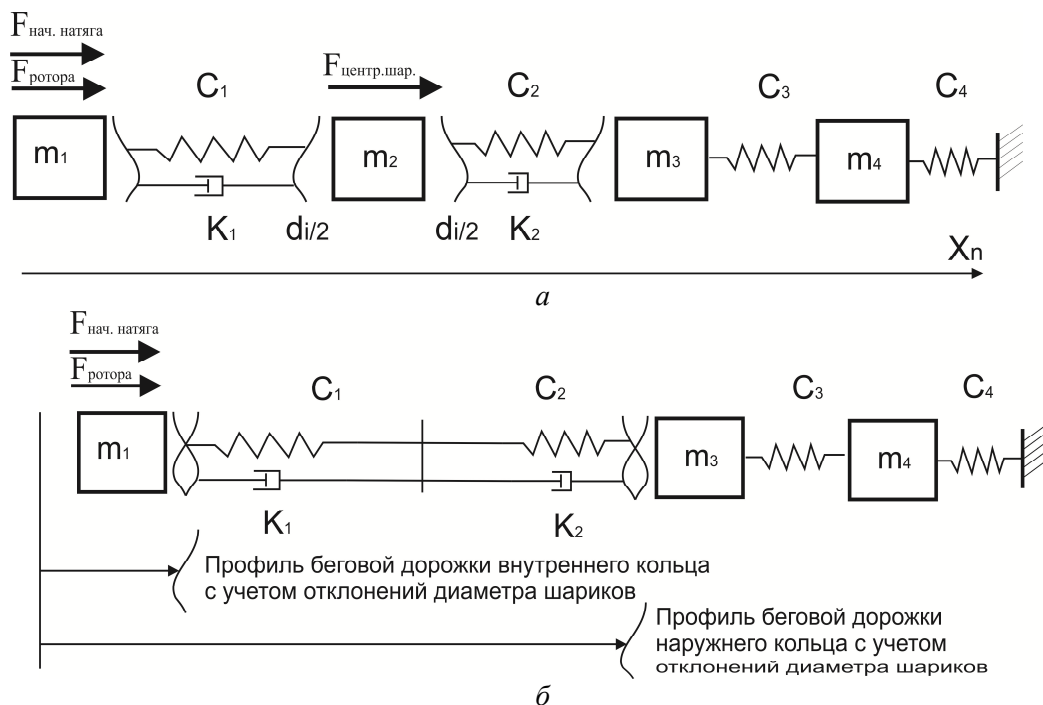


Рис. 2. Механическая система вдоль одной из подвижных осей:

$m_1$  – приведенная на опору масса шпинделя;  $m_2$  – масса шарика;  $m_3$  – масса наружного кольца;  $m_4$  – приведенная к опоре масса корпуса шпиндельного узла;  $C_1$  – жесткость контакта «внутреннее кольцо – шарик»;  $K_1$  – коэффициент вязкого сопротивления контакта «внутреннее кольцо – шарик»;  $C_2$  – жесткость контакта «шарик – наружное кольцо»;  $K_2$  – коэффициент вязкого сопротивления контакта «шарик – наружное кольцо»;  $C_3$  – жесткость контакта «наружное кольцо – узел»;  $C_4$  – жесткость контакта «узел – станина»;  $F_{nach.nat.}$  – сила предварительного натяга;  $F_{rotor}$  – сила периодического характера, вызванная дисбалансом шпинделя

Массой шарика  $m_2$  пренебрежем и примем равной нулю в связи с тем, что масса шарика меньше масс остальных элементов более чем на порядок, и упростим механическую систему до системы из трех сосредоточенных масс (рис. 2, б).

Система дифференциальных уравнений, описывающих движение масс упрощенной механической системы, изображенной на рис. 2, приведена ниже:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = F_{ist} - C_{ob}(x_1 - x_3 + A(t)) - k_{ob}(x_1 - x_3 + A(t))' \\ m_3 \ddot{x}_3 = C_{ob}(x_1 - x_3 + A(t)) + k_{ob}(x_1 - x_3 + A(t))' - C_3(x_3 - x_4) \\ m_4 \ddot{x}_4 = -C_4 x_4 + C_3(x_3 - x_4) \end{cases} \quad (1)$$

где  $C_{ob}$  – общая нелинейная жесткость контакта «шпиндель – наружное кольцо»,

равное  $\frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$ ;

$A(t)$  – суммарное кинематическое возмущение, вызванное неровностями профилей беговых дорожек и шарика;

$k_{ob}$  – общий коэффициент вязкого сопротивления, равный сумме коэффициентов  $K_1$  и  $K_2$ ;

$F_{ist}$  – общее силовое воздействие со стороны шпинделя.

Составляющими для  $F_{ist}$  являются:

– сила предварительного натяга (постоянная составляющая);

– периодическая сила, вызванная дисбалансом ротора:

$$\omega_p^2 \cdot m_1 \cdot e(t) \cdot \cos\left(\left(\omega_p - \omega_c\right) \cdot t - \frac{2\pi \cdot (n-1)}{z} + \varphi_{pc}\right); \quad (2)$$

– воздействие силы тяжести  $mg$  (зависит от расположения шпинделя).

Таким образом,

$$\vec{F}_{ist} = \vec{F}_{pred.natyag} + \vec{F}_{period} + \vec{F}. \quad (3)$$

Жесткости  $C_1$  и  $C_2$  являются величинами нелинейными, значения которых зависят от приложенной нагрузки и вычисляются по формулам по теории Герца:

$$\delta = \frac{2K}{\pi\mu} \cdot \left\{ \frac{3F}{2\sum\rho} \left[ \frac{(1-\varepsilon_I^2)}{E_I} + \frac{(1-\varepsilon_{II}^2)}{E_{II}} \right] \right\}^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sum\rho}{2}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}$  – коэффициенты Пуассона;

$E_I, E_{II}$  – модули упругости;

$\frac{2K}{\pi\mu}$  – числовой коэффициент пропорциональности, зависящий от геометрических

размеров подшипника;

$\sum\rho$  – сумма разности кривизн;

$F$  – приложенная сила [2].

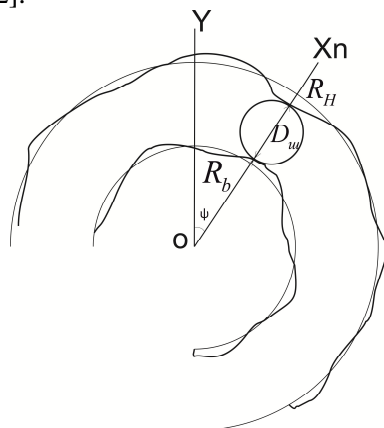


Рис. 3. Графическое пояснение к записи функции кинематического возмущения

Величина  $A_i(t)$  есть суммарное кинематическое возмущение, вызванное неровностями дорожек качения колец и линии качения шариков. Профили беговых дорожек качения представим в виде ряда Фурье как функции изменения радиусов, а для шарика – как функцию изменения диаметра (рис. 3), где  $R_b(\psi)$  – функция радиуса, описывающая профиль беговой дорожки внутреннего кольца;  $R_H(\psi)$  – функция радиуса, описывающая профиль беговой дорожки наружного кольца;  $D_{shar}(\psi)$  – функция, описывающая изменение диаметра шариков.

С учетом вышеизложенного выражение для кинематического возмущения запишем как

$$A_i(t) = (R_{H_o} - R_{b_o} - D_{shar_o}) + \sum_{m,n=1}^{\infty} \left( A_n \cdot \cos\left(n \cdot \psi + \omega_c \cdot t + \frac{2\pi}{z}(i-1) + \varphi_n\right) - A_m \cdot \cos(m \cdot \psi - (\omega_p - \omega_c) \cdot t + \right. \\ \left. + \frac{2\pi}{z} \cdot (i-1) + \varphi_m) - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k_{ob} \cdot \psi + 2 \cdot \omega_{shar} \cdot t + \psi_k) \right), \quad (5)$$

где  $\omega_p, \omega_c, \omega_{shar}$  – частоты вращения ротора, сепаратора и вращения шариков соответственно;  $i$  – номер шарика.

Известно, что существует динамическая аналогия между механическими, электрическими, акустическими и тому подобными системами основанная на формальном сходстве дифференциальных уравнений описывающих колебательные движения этих систем. В связи с этим исследования дифференциального уравнения движения одной системы могут быть распространены на динамически аналогичные системы иной природы [3].

При использовании аналогий механических и электрических цепей, методов расчета цепей с нелинейными элементами, в частности метода активного двухполюсника, с учетом обратной связи перемещения ротора с генерируемой им периодической силой найдены выражения для ускорения перемещения приведенной к опоре массы ротора:

$$\ddot{x}_1 = \omega \cdot \left( \frac{F_{ist}}{X_{LC} + X_{L_1}} - \frac{I \cdot X_{LC}}{X_{LC} + X_{L_1}} + \frac{2}{3} a \cdot \frac{X_{LC}}{X_{LC} + X_{L_1}} \cdot \frac{2}{\sqrt{p} + \sqrt{-p + \frac{2q}{p}}} \right); \quad (6)$$

перемещения массы узла вдоль оси подвижной системы координат

$$x_4 = \frac{U_{RC} \cdot X_{C_3} \cdot X_{C_4}}{C_4 \cdot X_{L_3} (X_{C_3} + X_{L_4} + X_{C_4}) + X_{C_3} \cdot (X_{L_4} + X_{C_4})} \quad (7)$$

и ускорения при перемещении массы узла вдоль оси подвижной системы координат

$$\ddot{x}_4 = \frac{U_{RC}}{m_4} \left( \frac{X_{C_3} \cdot (X_{L_4} + X_{C_4})}{X_{LC} \cdot (X_{C_3} + X_{L_4} + X_{C_4})} - \frac{X_{C_3} \cdot X_{C_4}}{X_{L_3} \cdot (X_{C_3} + X_{L_4} + X_{C_4}) + X_{C_3} \cdot (X_{L_4} + X_{C_4})} \right). \quad (8)$$

Величины  $X_{L_1}, X_{L_3}, X_{C_3}, X_{L_4}, X_{C_4}, X_{LC}$  являются реактивными сопротивлениями колебательной системы и вычисляются по формулам:

$$X_{L_1} = \omega \cdot m_1, X_{C_3} = \frac{C_3}{\omega}, X_{C_4} = \frac{C_4}{\omega}, X_{L_4} = \omega \cdot m_4, X_{L_3} = \omega \cdot m_3;$$

$$X_{LC} = \frac{X_{C_3} \cdot (X_{L_4} + X_{C_4})}{X_{C_3} + X_{L_4} + X_{C_4}} + X_{L_3}. \quad (9)$$

Величина  $U_{RC}$  – усилие на нелинейном контакте с учетом затрат на преодоление вязкого сопротивления, вычисляется по формуле

$$U_{RC} = \left( I + \frac{F_{ist}}{X_{L_1}} - \frac{2}{3} a \cdot \frac{2}{\sqrt{p} + \sqrt{-p + \frac{2 \left( I + \frac{F_{ist}}{X_{L_4}} \right) \cdot \rho(\omega)}{\sqrt{p}}}}} \right) \cdot \rho(\omega); \quad (10)$$

$$p = \frac{4}{3} \sqrt{2a \cdot (k + \rho(\omega))} \cdot \cos \left( \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{27 \left( \left( I + \frac{F_{ist}}{X_{L_1}} \right) \cdot \rho(\omega) \right)^2}{32a \cdot (k_{ob} + \rho(\omega)) \sqrt{2a \cdot (k_{ob} + \rho(\omega))}} \right) \right); \quad (11)$$

$k_{ob}$  – общий коэффициент вязкого сопротивления;

$\rho(\omega)$  – характеристическое сопротивление цепи;

$k_{ob} + \rho(\omega)$  – полное сопротивление цепи, т. е. с учетом потерь на вязкое сопротивление.

Величина  $a$  является числовым коэффициентом, значение которого зависит от геометрических размеров подшипника и материала его изготовления.

Величина  $I$  определяется как первая производная от функции кинематического возмущения, вызванного отклонениями геометрической формы, выражается как

$$I = \frac{dA(t)}{dt}. \quad (12)$$

Для проверки достоверности полученных выражений на рис. 4 приведены графики зависимости контактной деформации при статическом нагружении цепи, построенные в пакете MatLab, при значениях коэффициента вязкого сопротивления 0.5, 0.01 и  $\rho(\omega) = 1$ ,  $a = 1$  и отсутствии кинематического возмущения.

Из графика видно, что при уменьшении величины коэффициента вязкого сопротивления график  $U_c$  вырождается в график выражения  $\delta = a \cdot U_c^{\frac{2}{3}}$ , что соответствует зависимости контактной деформации от приложенной силы [2].

Относительно оси  $Y$  неподвижной системы координат перемещение  $x_4$  будет равно

$$x_{4Y_n} = \frac{U_{RC} \cdot X_{C_3} \cdot X_{C_4} \cdot \cos\left(\omega_c \cdot t + \varphi_0 + \frac{2\pi \cdot (n-1)}{z}\right)}{C_4 \cdot X_{L_3} \cdot (X_{C_3} + X_{L_4} + X_{C_4}) + X_{C_3} \cdot (X_{L_4} + X_{C_4})}. \quad (13)$$

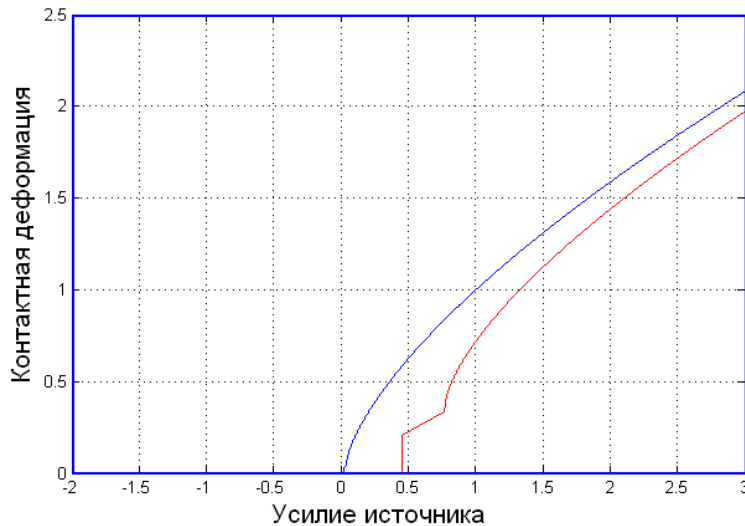


Рис. 4. Графики зависимости контактной деформации при статическом нагружении цепи

Суммарное перемещение будет иметь вид

$$x_{Y4} = \sum_{n=1}^z \left( \frac{U_{RC} \cdot X_{C_3} \cdot X_{C_4} \cdot \cos\left(\omega_c \cdot t + \varphi_0 + \frac{2\pi \cdot (n-1)}{z}\right)}{C_4 \cdot X_{L_3} \cdot (X_{C_3} + X_{L_4} + X_{C_4}) + X_{C_3} \cdot (X_{L_4} + X_{C_4})} \right); \quad (14)$$

Или, обозначив  $B(\omega) = \frac{X_{C_3} \cdot X_{C_4}}{C_4 \cdot X_{L_3} \cdot (X_{C_3} + X_{L_4} + X_{C_4}) + X_{C_3} \cdot (X_{L_4} + X_{C_4})}$ , переписем

$$x_{Y4} = \sum_{n=1}^z \left( I + \frac{F_{ist}}{X_{L_1}} - \frac{2}{3}a \cdot \frac{2}{\sqrt{p} + \sqrt{-p + \frac{2\left(I + \frac{F_{ist}}{X_{L_4}}\right) \cdot \rho(\omega)}{\sqrt{p}}}}} \right) \times B(\omega) \cdot \cos\left(\omega_c \cdot t + \varphi_0 + \frac{2\pi \cdot (n-1)}{z}\right). \quad (15)$$

Данные выражения справедливы при условии, что мгновенная амплитуда периодической составляющей возмущающей силы меньше величины предварительного

натяга, – это вполне справедливо для рабочих режимов работы шпинделей для прецизионной обработки, в противном случае режим работы подшипника становится существенно нелинейным и выражение для  $U_{RC}$  запишется в более сложной форме.

Полученная математическая модель качественно определяет механизм возникновения частотного состава спектра вибрации, учитывает микрогеометрию профилей беговых дорожек и шариков при работе радиального (радиально-упорного) шарикоподшипника и дает количественную оценку, погрешность которой во многом будет зависеть от соотношения сигнал/помеха экспериментально полученной временной реализации виброускорения (виброперемещения).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. The Hilbert-Huang transform and its applications/editors, Norden E. Huang, Samuel S.P. Shen. – World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 5 Toh Tuck. Link, Singapore 596224.
2. *Бейзельман Р.Д., Цыкин Б.В., Перель Л.Я.* Подшипники качения: Справ. 6-е изд. – М.: Машиностроение, 1975. – 574 с.
3. Вибрации в технике: Справочник. В 6 т. Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.) – М.: Машиностроение, 1978.

*Статья поступила в редакцию 25 сентября 2013 г.*

## MODEL OF THE SUPPORT OF THE SPINDLE ON BEARINGS ROLLING

*E.S. Gasparov, A.F. Denisenko, L.B. Gasparova*

Samara State Technical University,  
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100

*The question is considered creation of mathematical model of a bearing support of a spindle. The model will be able to describe the mechanism of formation a signal of vibration, having connected it to parameters of a technical condition.*

**Keywords:** *mathematical model, the Hilbert-Huang transform, radial ball-bearing, disbalance, vibration.*

---

*Erik S. Gasparov, Assistant.*

*Alexander F. Denisenko (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.*

*Lana B. Gasparova (Ph.D. (Pedag.)), Associate professor.*