Энергетика

УДК 681.5.015

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ОСНОВЕ АЛЬТЕРНАНСНОГО МЕТОДА ОПТИМИЗАЦИИ*

А.Н. Дилигенская

Самарский государственный технический университет
443100, . Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Обратная задача теплопроводности рассматривается как коэффициентная задача для линейного параболического уравнения теплопроводности. Для идентификации средних значений теплофизических параметров задача формулируется как задача оптимизации процесса с распределенными параметрами, что приводит к условно-корректной постановке проблемы. Ее решение основывается на альтернансных свойствах экстремалей.

Ключевые слова: *Коэффициентная обратная задача теплопроводности, условно-корректная постановка задачи, специальная задача математического программирования, альтернансный метод*

При изучении теплофизических процессов наряду с экспериментальными исследованиями большое значение приобретают методы математического моделирования и идентификации. Так, определение теплофизических свойств материала по информации о температуре внутри тела может быть основано на решении обратных задач теплопроводности, в связи с чем большой практический интерес приобрели коэффициентные обратные задачи теплопроводности (ОЗТ), заключающиеся в определении коэффициентов уравнения переноса теплоты [1,2].

Общий подход к решению коэффициентных обратных задач состоит в применении численных методов [1].

Применение аналитических методов, как правило, ограничивается решением ОЗТ для геометрически простых тел, что, тем не менее, охватывает широкий круг реальных практических объектов, при этом дает возможности для исследования протекающих процессов.

В стандартной постановке линейной внутренней ОЗТ по определению теплофизических характеристик материала рассматривается одномерное уравнение нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x < \infty, \quad 0 < t \le t_к, \tag{1}$$

описывающее распределение температуры $T(x,t)$ в полуограниченной области из-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-08-00277).

Анна Николаевна Дилигенская (к.т.н.), доцент кафедры «Автоматика и управление в технических системах».

менения пространственной переменой x и во времени t, зависящее от коэффициента температуропроводности a.

Уравнение (1) должно удовлетворять соответствующим краевым условиям, имеющим вид

$$T(x,0)=0,\ T(0,t)=T_0,\ \lim \left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x\to\infty}=0. \tag{2}$$

Начальное распределение $T(x,0)$, температура поверхности нагреваемого тела T_0 полагаются известными, а определению подлежит значение коэффициента температуропроводности a. Считается, что в некоторой фиксированной точке $x^* \in [0,\infty)$ ведется измерение температуры и получены температурные зависимости $T^*(t)$, на основе которых требуется определить значение a, аппроксимирующее его общую зависимость от температуры $a(T)$ на всем интервале нагрева некоторой средней величиной $a^* = const$.

На искомую функцию $a^* = const$ накладываются ограничения

$$a \in V,\ t > 0 \tag{3}$$

принадлежности заданному множеству V допустимых значений a.

Сформулируем модельную коэффициентную ОЗТ в экстремальной постановке [1]. По заданной температурной зависимости $T^*(t)$ требуется определить значение a^*, минимизирующее невязку между $T^*(t)$ и точным решением $T(x^*,t)$ краевой задачи (1), (2), соответствующим искомому a^*.

Оценивать эту невязку возможно на основе ошибки равномерного приближения $\left|T(x^*,t)-T^*(t)\right|$ результирующего температурного поля к требуемому на заданном временном интервале $t \in \left[0,t_{\text{к}}\right]$ [3, 4]. В этом случае оптимальная задача формулируется следующим образом.

Для объекта (1), (2) необходимо найти подчиненное ограничению (3) значение $a^* = const$, обеспечивающее на заданном интервале $t \in \left[0,t_{\text{к}}\right]$ выполнение условия минимаксного соотношения

$$I(a)=\max_{t\in[0,t_{\text{к}}]}\left|T(x^*,t)-T^*(t)\right| \to \min_{a\in V}. \tag{4}$$

Для получения единственно возможной конечномерной постановки задачи искомая величина $a^* = const$ принимается за управляющее воздействие, подчиненное типовому ограничению

$$a = a^* = const \le a_{\max},\ t \in \left(0,t_{\text{к}}\right), \tag{5}$$

и неизвестное значение a^* рассматривается как единственный параметр искомого управления [5].

В этом случае температурное поле объекта определяется общим решением краевой задачи (1), (2) и, в частном случае $T_0 = const$, может быть представлено в виде бесконечного ряда [6]

$$T(x,t)=T_0\left(1-erf\left(x\Big/2\sqrt{at}\right)\right). \qquad (6)$$

На основе соотношения (6) можно получить следующую постановку задачи.

Для объекта управления (6) требуется найти подчиненное ограничению (5) управляющее воздействие a^*, при котором на заданном интервале $[0,t_к]$ достигается минимакс

$$I(a)=\max_{t\in[0,t_к]}\left|T(x^*,t,a)-T^*(t)\right|\to\min_a, \quad T(x^*,t,a)=T_0\left(1-erf\left(x^*\Big/2\sqrt{at}\right)\right). \qquad (7)$$

Исходная задача сводится к задаче параметрической оптимизации, или специальной негладкой задаче математического программирования (7) относительно искомого параметра a^*.

Решение задачи (7) может быть основано на использовании специальных альтернансных свойств разности $T(x^*,t,a)-T^*(t)$.

На основании этих свойств [3,4] для разности $T(x^*,t,a)-T^*(t)$ на интервале $[0,t_к]$ достигаются знакочередующиеся максимальные по абсолютной величине значения в точках $t_j\in(0,t_к)$, $j=\overline{1,N}$, число N которых на единицу превышает число искомых параметров. На основании этого свойства составляется замкнутая система двух соотношений для предельных разностей температур в этих точках относительно всех неизвестных, дополненная условиями существования экстремума этой функции в точках, не совпадающих с границами интервала

$$\begin{aligned} &T(x^*,t_j,a)-T^*(t_j)=(-1)^j\cdot\psi\cdot I(a), \qquad j=1,2; \quad \psi=\{1\bigcap-1\} \\ &\frac{\partial}{\partial t}\left[T(x^*,t_j,a)-T^*(t_j)\right]=0, \qquad j=1,2. \end{aligned} \qquad (8)$$

Решение системы уравнений (8) дает среднее значение $a^*=const$, аппроксимирующее действительную зависимость $a(T)$ реализуемого на интервале $(0,t_к)$ процесса нестационарной теплопроводности, соответствующего измеряемой температуре $T^*(t)$.

В качестве примера рассматривалось нелинейное уравнение теплопроводности, которое при постоянных значениях удельной теплоемкости c и плотности материала γ ($c\gamma=const$) имеет вид [6]

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[a(T)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right], \qquad 0<x<R, \quad 0<t\le t_к, \qquad (9)$$

где

$$a(T)=\frac{1}{c\gamma}\lambda(T), \qquad (10)$$

λ - коэффициент теплопроводности с краевыми условиями вида (2).

Аналитическое решение нелинейной задачи (9,2,10) при зависимости коэффициентов переноса от температуры вида

$$a(T) = \frac{a_0}{(1-\xi T)^2} \qquad a_0, \xi = const\,, \tag{11}$$

используемое для вычисления $T^*(t)$ для значений $\frac{1}{(1-T_0\xi)^2}$ от 5 до 50 приведено в [6].

Решение соответствующей системы соотношений при численных значениях $a_0 = 0.4\cdot 10^{-6}\,\text{м}^2/c$; $\xi = 0.38\cdot 10^{-3}$; $T_0 = 400\,^0C$; $x^* = 0.8$ дает оптимальную по критерию (7) аппроксимацию постоянным значением a^* идентифицируемой функции $a(T)$ вида (10). Сравнительные результаты решения задачи представлены на рисунках.

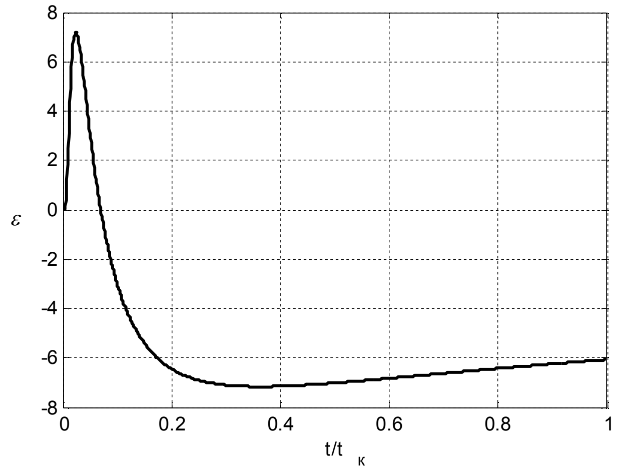

Рис. 1. Ошибка приближения температурного поля $\varepsilon = T(x^*,t,a) - T^*(t)$

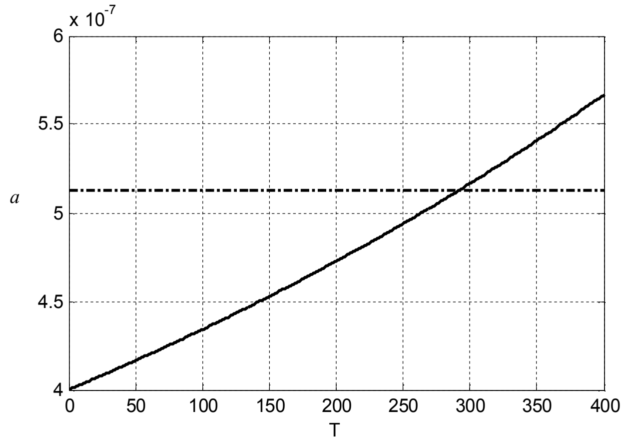

Рис. 2. Истинное значение коэффициента теплопроводности $a(T)$
и его аппроксимация a^*

Рассмотренная методика решения задач в экстремальной постановке, основанная на использовании специальных альтернансных свойств погрешности температур $T(x^*,t,a) - T^*(t)$, может быть использована для аналитического решения коэффициентных обратных задач теплопроводности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
2. Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности. В 2-х томах. Киев: Наукова Думка, 2002. 408 с.
3. Плешивцева Ю.Э., Рапопорт Э.Я. Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами. Известия РАН. ТиСУ, 2009. № 3. С. 22-33.
4. Рапопорт Э.Я., Плешивцева Ю.Э. Алгоритмически точный метод параметрической оптимизации в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами. Автометрия, 2009. Т. 45, № 5. С. 103-112.
5. Рапопорт Э.Я. Плешивцева Ю.Э. Специальные методы оптимизации в обратных задачах теплопроводности. Известия РАН. Энергетика, 2002. № 5. С. 144-155.
6. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.- 600 с.

Статья поступила в редакцию 31 июля 2013 г.

THE LINEAR COEFFICIENT INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEM BASED ON ALTERNANCE ORTIMIZATION METHOD

A.N. Diligenskaya

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

Inverse thermal conductivity problem is considered as coefficient problem for linear parabolic equation. To identify the average thermal parameters the problem is formulated as an optimization problem of process with distributed parameters. The conditional-correct formulation of problem is stated. Solution is based on the alternance properties desired extremals.

Keywords: *Coefficient inverse heat problem, conditional-correct formulation, the special problem of mathematical programming, alternance method*

A.N. Diligenskaya (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.