

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССА АВТОМАТИЧЕСКОЙ СБОРКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ДЕТАЛЕЙ**Л.Б. Черняховская**Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

На основе анализа вертикальной схемы сборки цилиндрических деталей, при которой одна из них закреплена, а вторая перемещается, опираясь на кромку первой, установлены основные закономерности процесса их совмещения. Определены траектории и скорости точек, расположенных на поверхности подвижной детали, получены уравнения центроид для каждой детали. Предложена методика расчета минимальных значений сборочных усилий, обеспечивающих совмещение деталей, и сил взаимодействия в точках контакта, препятствующих этому процессу.

Ключевые слова: цилиндрические детали, автоматическая сборка, три точки контакта, траектории, скорости, центроиды, сборочные усилия.

Надежность автоматической сборки цилиндрических деталей, как и любых операций, реализующих механическое перемещение, определяется соответствием движения исполнительного механизма объективным закономерностям движения, обусловленным особенностями относительного расположения деталей.

В данной работе приводятся результаты анализа процесса сборки цилиндрических деталей с малым гарантированным зазором [1], при котором одна из деталей (втулка или вал) закрепляется в вертикальном положении, а вторая, установленная на нее сверху, перемещается, опираясь на три точки кромки первой.

При решении этой задачи обе детали считаются абсолютно твердыми телами правильной геометрической формы, а контакт между их поверхностями – точечным, детали имеют гарантированный зазор $\delta = D - d$, где D – диаметр отверстия втулки, d – диаметр вала. Детали в процессе совмещения контактируют тремя точками в том случае, угол между их осями $\gamma > \arccos d/D$. Одна из точек контакта, точка K , находится между образующей вала и кромкой отверстия втулки в плоскости, проходящей через оси деталей, две другие расположены между совмещаемыми кромками симметрично указанной плоскости, их положение характеризуется точкой B , являющейся серединой соединяющего их отрезка (рис. 1, рис. 2).

В процессе совмещения угол наклона между деталями γ уменьшается, симметричные точки контакта сближаются и при $\gamma = \arccos d/D$ сливаются в одну. Дальнейшее движение деталей происходит при значениях $\gamma < \arccos d/D$ и протекает в условиях контакта двумя точками. Закономерности этого движения детально и полно исследованы в работах, посвященных автоматической сборке цилиндрических деталей [2], [3].

Деталь, опирающаяся на три точки кромки другой детали, может совершать три независимых друг от друга движения: вращение вокруг собственной оси, вращение вокруг оси неподвижной детали и плоскопараллельное движение с основной плоскостью, совпадающей с плоскостью симметрии деталей. В первых двух случаях угол γ

между осями деталей не меняется, расстояния между точками контакта остаются постоянными и совмещения деталей не происходит.

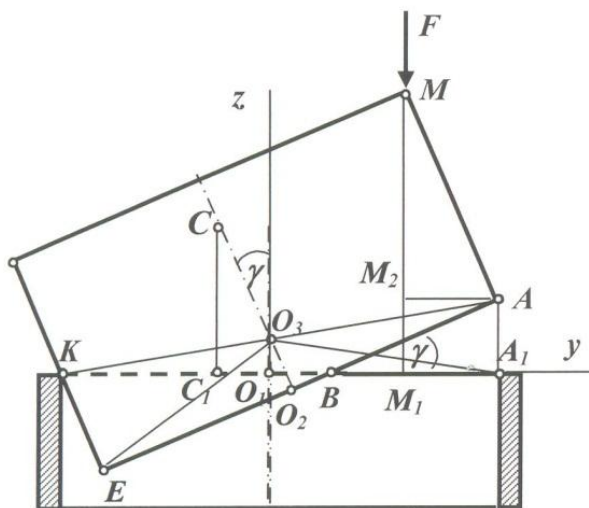


Рис. 1. Геометрические параметры процесса совмещения для вертикально закрепленной втулки

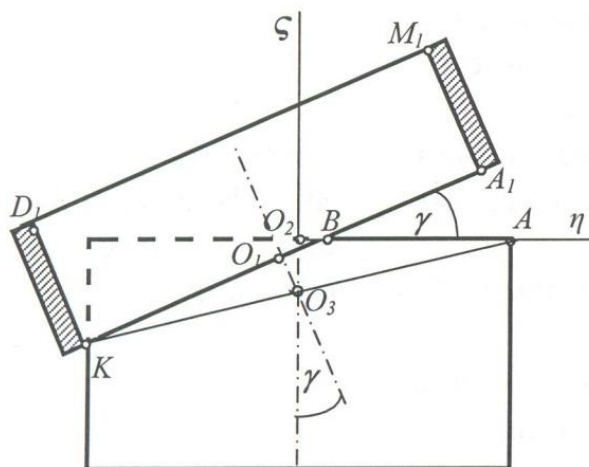


Рис. 2. Геометрические параметры процесса совмещения для вертикально закрепленного вала

Изменение угла γ происходит только при плоскопараллельном движении, закономерности которого характеризуют процесс совмещения деталей. Плоскопараллельное движение подвижной детали характеризуется движением ее сечения в плоскости симметрии, проходящей через оси деталей. В общем случае положение сечения в своей плоскости определяется тремя параметрами: координатами y_C , z_C центра масс C подвижной детали и углом γ между их осями, но в процессе совмещения точки контакта ограничивают свободу перемещения, вследствие чего координаты цен-

тра масс подвижной детали, как и всех остальных ее точек, однозначно определяются углом γ между осями деталей.

Положение точек подвижной детали определяется относительно неподвижной системы координат, связанной с центром совмещаемого торца неподвижной детали. Если подвижной деталью является вал, то его положение определяется относительно системы координат O_1x_1 , начало которой выбирается в центре окружности совмещаемой кромки втулки (см. рис. 1); если подвижная деталь – втулка, то ее положение определяется относительно системы координат $O_2\eta_2$ (см. рис. 2). В первом случае положение симметричных точек контакта характеризуется расстоянием $S_1 = O_1B$ отрезка, соединяющего симметричные точки контакта, до центра O_1 ; во втором случае – расстоянием $S_2 = O_2B$:

$$S_1 = O_1B = \frac{D(1 + \cos^2 \gamma) - 2d \cos \gamma}{2 \sin^2 \gamma};$$

$$S_2 = O_2B = \frac{d(1 + \cos^2 \gamma) - 2D \cos \gamma}{2 \sin^2 \gamma}.$$

Расстояния от точки O_3 пересечения осей деталей до центров O_1 и O_2 определяются равенствами

$$O_1O_3 = -\frac{d - D \cos \gamma}{2 \sin \gamma}; \quad O_2O_3 = -\frac{D - d \cos \gamma}{2 \sin \gamma}.$$

Координаты центра масс подвижной детали в указанных системах координат равны

$$y_C = 0,5H \sin \gamma - O_1O_3 \sin \gamma; \quad \eta_C = 0,5H \sin \gamma - O_2O_3 \sin \gamma;$$

$$z_C = 0,5H \cos \gamma - S_2 \sin \gamma. \quad \zeta_C = 0,5H \cos \gamma - S_1 \sin \gamma.$$

Таким образом, положение подвижной детали в процессе совмещения однозначно определяется углом между осями, т. е. подвижная деталь имеет одну степень свободы, а угол γ является обобщенной координатой. Кроме того, выражения для координат всех точек подвижной детали при трехточечном контакте полностью совпадают с выражениями для координат этих же точек при двухточечном контакте [2], [3]. Следовательно, движение детали, обеспечивающей процесс совмещения, независимо от числа точек контакта подчиняется одним и тем же закономерностям.

Для обеспечения совмещения деталей необходимо, чтобы траектория, создаваемая сборочным устройством, соответствовала траектории той точки, на которую это устройство воздействует. Так, например, сборка вертикальным усилием, приложенным к точке M вала (см. рис. 1), возможна при установке вала на позиции сборки под углом, не превышающим определенного значения. Координаты точки M вала, определяющие ее положение в процессе совмещения, равны

$$y_M = 0,5D - H \sin \gamma;$$

$$z_M = H \sin \gamma + O_1O_3 \sin \gamma.$$

Траектория точки M , построенная в соответствии с этими уравнениями, имеет точку перегиба, положение которой зависит от угла γ . Угол, соответствующий наивысшему положению точки M , определяется графиком зависимости координаты z_M этой точки от угла между осями деталей γ . На рис. 3 представлен указанный график, построенный для деталей с размерами $d = 49.9$ мм, $D = 50$ мм, $H = 70$ мм в интервале изменения угла, определяемом неравенством $\arccos \frac{d}{D} \leq \gamma \leq 0,5$. Как следует

из графика, максимально высокое положение точки M соответствует значению угла

$\gamma_{max} = 21,7^\circ$. Это означает, что совмещение деталей указанных размеров в данном случае возможно при условии, если вал будет установлен на кромку втулки под углом $\gamma < 21,7^\circ$, в противном случае произойдет заклинивание деталей.

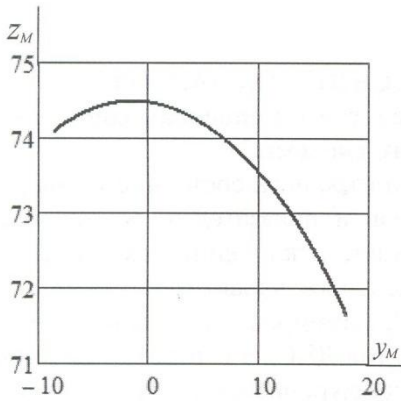


Рис. 3. Траектория точки M, соответствующая процессу совмещения деталей

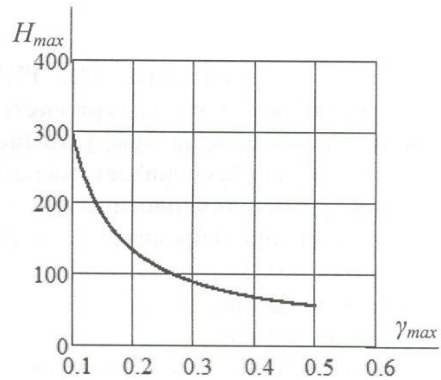


Рис. 4. Зависимость максимальной высоты вала от угла γ_{max} на позиции сборки

Максимальное значение координаты z_M , соответствующее точке перегиба кривой $z_M = z_M(\gamma)$, определяется уравнением $\frac{dz_M}{d\gamma} = 0$, откуда следует, что

$$H_{max} = \frac{D - d \cos \gamma_{max}}{\sin^3 \gamma_{max}}.$$

Из этого равенства можно для конкретных значений d и D найти соотношение между значением максимальной высоты вала H_{max} и значением угла γ_{max} при котором точка M начинает в процессе совмещения опускаться. На рис. 4 представлен график зависимости максимальной высоты вала H_{max} от угла γ_{max} для деталей с диаметрами $d = 49,9$ мм, $D = 50$ мм. Как следует из графика, чем меньше высота вала, тем больше может быть угол между осями, соответствующий началу совмещения деталей при сборочном усилии, приложенном в точке M .

Координаты точки A , находящейся на конце диаметра нависающей части кромки вала в плоскости симметрии, равны (рис. 5)

$$y_A = S_1 + \left(\frac{d}{2} - S_2\right) \cos \gamma = \frac{D}{2};$$

$$z_A = \left(\frac{d}{2} - S_2\right) \sin \gamma = \frac{d - D \cos \gamma}{\sin \gamma}.$$

Следовательно, точка A движется по прямой AA_1 , являющейся продолжением находящейся в плоскости симметрии образующей внутренней поверхности втулки. При достижении углом между осями значений $\gamma \leq \arccos d/D$ точка A плавно переходит на внутреннюю поверхность втулки, т. е. траектория точки A не меняется в течение всего процесса совмещения.

Особенности движения точки A позволяют установить направления скоростей всех точек вала для любого значения угла γ (рис. 5) при помощи мгновенного центра скоростей L , который находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных

к скоростям в точках A и K . При трехточечном контакте скорость точки B , лежащей в плоскости симметрии деталей в середине отрезка B_1B_2 , будет направлена перпендикулярно отрезку BL , значит, векторы скоростей в симметричных точках контакта B_1 и B_2 при плоскопараллельном движении будут параллельны скорости точки B и равны ей по величине.

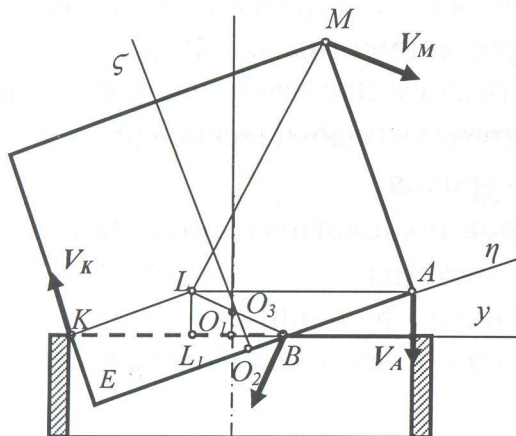


Рис. 5. Распределение скоростей при контакте деталей в трех точках

Координаты мгновенного центра скоростей L (см. рис. 5) в системах координат O_1yz и $O_2z\eta$ при контакте деталей в трех точках соответственно равны

$$y_L = -S_1 = -\frac{D(1 + \cos^2 \gamma) - 2d \cos \gamma}{2 \sin^2 \gamma}; \quad z_L = 2O_3O_1 = \frac{d - D \cos \gamma}{\sin \gamma};$$

$$\eta_L = -S_2 = -\frac{d(1 + \cos^2 \gamma) - 2D \cos \gamma}{2 \sin^2 \gamma}; \quad \zeta_L = 2O_3O_2 = \frac{D - d \cos \gamma}{\sin \gamma}.$$

В тот момент, когда точка A пересекает плоскость окружности кромки, скорость точки K равна нулю, т. е. при $\gamma = \arccos d/D$ мгновенный центр скоростей находится в точке K . Скорость точки K при углах $\gamma < \arccos d/D$ меняет направление на противоположное по сравнению с контактом деталей в трех точках. Скорость точки A (рис. 6), в которой сливаются две симметричные точки контакта, направлена по образующей внутренней поверхности втулки. Мгновенный центр скоростей L_1 в этом случае выходит за пределы сечения вала (см. рис. 6), но его координаты в неподвижной и подвижной системах координат после преобразований приводятся к тем же выражениям, что и при трехточечном контакте.

Координаты мгновенного центра скоростей, выраженные в системах координат, связанных с каждой деталью, определяют формы двух центроид, одна из которых принадлежит валу, вторая – втулке (рис. 7). Движение, приводящее к совмещению деталей, независимо от их относительного расположения представляет собой качение без скольжения центроид друг по другу.

Полученная кинематическая модель процесса совмещения деталей при трехточечном контакте между ними, основанная на законах плоскопараллельного движения, позволяет рассмотреть задачу определения сил взаимодействия в точках контакта и оценить степень их влияния на процесс совмещения.

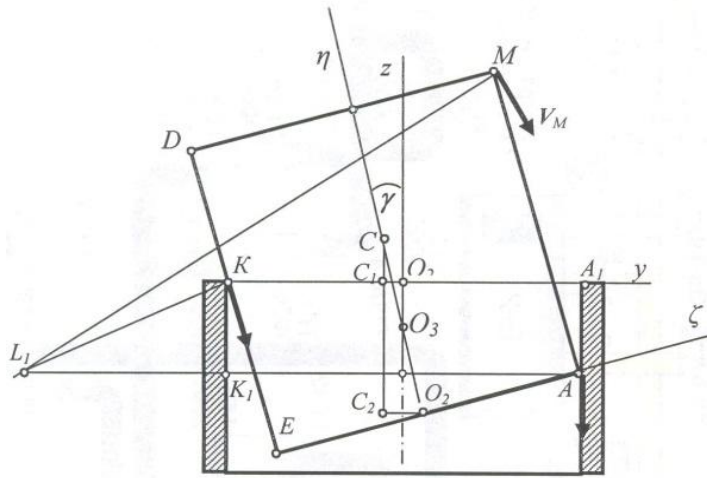


Рис. 6. Геометрические параметры при контакте в двух точках

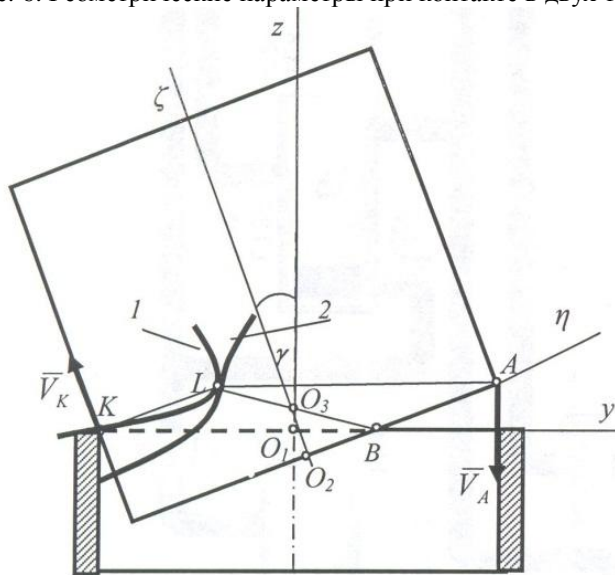


Рис. 7. Центроиды: 1 – подвижная; 2 – неподвижная

Силы взаимодействия в точках контакта состоят из реакций и сил трения. Нормальная реакция, действующая на деталь в симметричных точках контакта, должна лежать одновременно в двух плоскостях, одна из которых, являясь нормальной по отношению к кромке вала, проходит через ось вала, другая – через ось втулки; следовательно, силы, действующие на деталь в точках B_1 и B_2 , будут направлены по линии пересечения этих плоскостей, т. е. по прямой, соединяющей соответствующую точку контакта с точкой O_3 пересечения осей вала и втулки. При плоскопараллельном движении нормальные реакции \bar{N}_{B_1} и \bar{N}_{B_2} в симметричных точках контакта B_1 и B_2 равны по модулю, а их равнодействующая \bar{N}_B направлена по прямой, соединяющей точку B (сердину отрезка B_1B_2) с точкой пересечения осей вала и втулки O_3 , и проходит через мгновенный центр скоростей L (рис. 8).

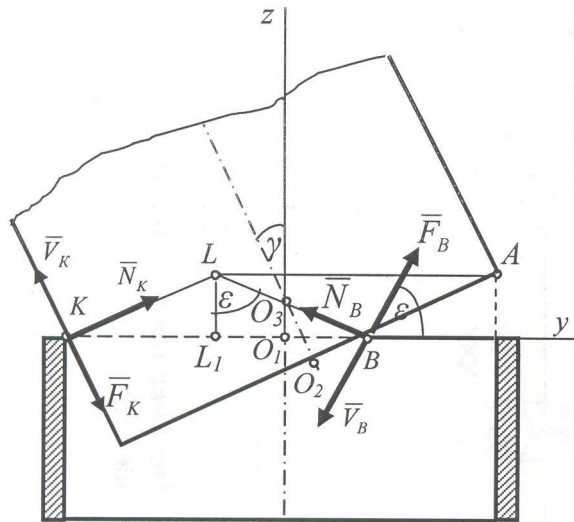


Рис. 8. Направления сил, действующих на вал в точках контакта деталей

Модуль равнодействующей равен $N_B = 2N_{B1} \sin \alpha$, где $\sin \alpha = \frac{O_3B}{O_3B_1}$, O_3B_1 – отрезок, соединяющий точку пересечения осей деталей с одной из симметричных точек контакта.

Силы трения \vec{F}_{B1} и \vec{F}_{B2} в симметричных точках контакта B_1 и B_2 направлены противоположно скоростям в этих точках и приводятся к равнодействующей \vec{F}_B , равной $F_B = 2f N_{B1}$ и приложенной в точке B . При плоскопараллельном движении все силы, действующие на подвижную деталь в точках контакта, образуют систему сил, расположенную в плоскости симметрии деталей. Следовательно, результирующее действие сборочного устройства также должно приводиться к плоской системе сил.

Движение детали, опирающейся на три точки и имеющей одну степень свободы, начинается в том случае, если обобщенная сила Q_γ , соответствующая определенному значению угла γ между осями деталей, становится больше нуля. Выражение для обобщенной силы, полученное после соответствующих преобразований, оказалось равным сумме моментов всех приложенных к детали сил относительно мгновенного центра скоростей. Учитывая, что сумма моментов всех нормальных реакций равна нулю, так как их линии действия проходят через мгновенный центр скоростей, получаем, что обобщенная сила равна сумме моментов сборочных усилий, силы тяжести и сил трения в точках контакта:

$$Q_\gamma = m_L(\vec{F}) + M + m_L(mg) + m_L(\vec{F}_K) + m_L(\vec{F}_B) > 0.$$

Таким образом, процесс совмещения происходит при условии, что моменты сборочных усилий и силы тяжести превышают сумму моментов сил трения относительно мгновенного центра скоростей:

$$m_L(\vec{F}) + M + m_L(mg) > m_L(\vec{F}_K) + m_L(\vec{F}_B).$$

При вертикальной схеме сборки сила тяжести подвижной детали может способствовать совмещению или препятствовать ему в зависимости от величины угла γ . В процессе совмещения существует угол γ_0 , при котором линия действия силы тяжести проходит через мгновенный центр скоростей и момент силы тяжести становится равным нулю. Для того чтобы определить значение γ_0 , соответствующее конкретным параметрам деталей, достаточно приравнять нулю плечо силы тяжести: $y_C - y_L = 0$. Например, для схемы, в которой подвижной деталью является вал, для значений $D = 50 \text{ мм}$, $d = 49,95 \text{ мм}$, $H = 70 \text{ мм}$ при $\gamma_0 = 7,3^\circ$ момент силы становится равным нулю и, следовательно, при углах $\gamma < 7,3^\circ$ направлен в сторону совмещения деталей. Существуют способы сборки цилиндрических деталей [4], заключающиеся в искусственном смещении центра тяжести вала, в этом случае момент силы тяжести превышает сумму моментов сил трения и обеспечивает процесс совмещения.

При вертикальной схеме сборки область минимальных значений сборочных усилий, обеспечивающих совмещение, можно определить исходя из того, что в первом приближении процесс совмещения деталей можно представить как квазистатический, т. е. рассматривать его как совокупность пошаговых перемещений детали из состояния равновесия к движению. В этом случае каждый шаг может быть описан уравнениями равновесия, что соответствует малым перемещениям, скоростям и ускорениям, характерным для процесса совмещения, и минимальным значениям сборочных усилий, обеспечивающих совмещение.

При равновесии детали независимо от схемы сборки сумма моментов всех действующих на нее сил относительно мгновенного центра скоростей L равна нулю:

$$m_L(\bar{F}) + M + m_L(m\bar{g}) + m_L(\bar{F}_K) + m_L(\bar{F}_B) = 0.$$

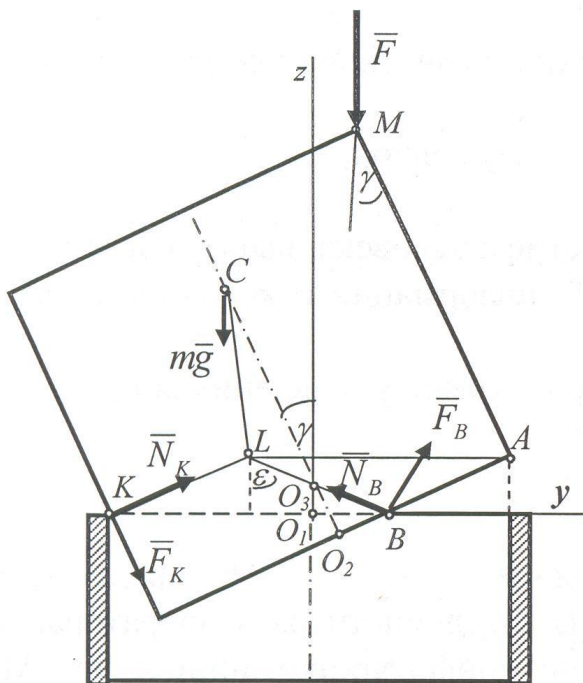


Рис. 9. Распределение действующих на вал сил при сборке плоским толкателем

Это уравнение дополняется уравнениями проекций всех сил на оси координат y и z (рис. 8), выражения которых также одинаковы для обеих схем сборки:

$$\sum F_{ky} = F_y + N_K \cos \gamma + F_K \sin \gamma - N_B \sin \varepsilon + F_B \cos \varepsilon = 0;$$

$$\sum F_{kz} = F_z - mg + N_K \sin \gamma - N_K \cos \gamma + N_B \cos \varepsilon + F_B \sin \varepsilon = 0.$$

Совместное решение полученных уравнений позволяет определить минимальные значения сборочных усилий, необходимых для обеспечения процесса совмещения для конкретной схемы сборки и возникающих в точках контакта сил взаимодействия между деталями.

Анализ полученных уравнений показал, что при воздействии на деталь сборочным усилием в точках контакта возникают значительные силы взаимодействия между деталями, которые возрастают при уменьшении угла между осями деталей.

При воздействии на вал вертикальной силой \bar{F} , приложенной в точке M , получаем уравнения, которые после преобразований приводятся к виду (рис. 9)

$$N_K (\cos \gamma + f \sin \gamma) - 2N_{B1} (\sin \alpha \sin \varepsilon - f \cos \varepsilon) = 0;$$

$$N_K (\sin \gamma - f \cos \gamma) + 2N_{B1} (\sin \alpha \cos \varepsilon + f \sin \varepsilon) - mg - F = 0;$$

$$F(y_M - y_L) + mg(y_C - y_L) - f N_K LK - 2f N_{B1} LB = 0.$$

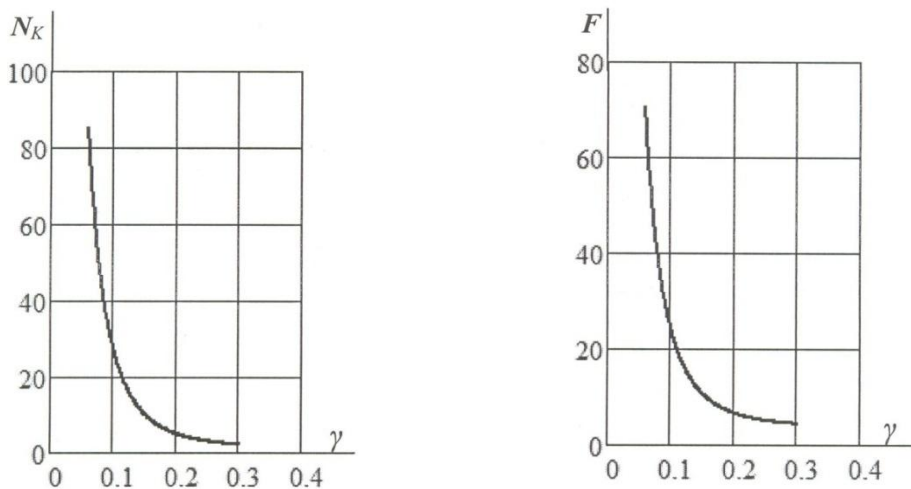


Рис. 10. Графики изменения реакции в точке K и сборочного усилия F в зависимости от угла γ

Входящие в эти уравнения отрезки и тригонометрические функции определяются через известные величины S_l и $O_l O_3$. На рис. 10 приведены графики зависимостей от угла γ силы N_K , действующей на вал в точке K , и минимального значения сборочного усилия F , способного сообщить валу движение внутрь втулки. Сила тяжести принята за единицу измерения искомых величин. Интервал изменения угла γ заключен между минимальным значением, при котором существует трехточечный контакт $\gamma_0 = \arccos d/D$, и значением $\gamma_{max} = 21,7^\circ$, определяющим максимально высокое расположение точки M , при котором возможно совмещение деталей.

Как следует из графиков, значения реакций, действующих на вал в точках контакта, и сборочного усилия при уменьшении угла между осями резко возрастают и

при углах $\gamma \rightarrow \arccos \frac{d}{D}$ значительно превышают значение силы тяжести. Точно такие силы действуют в точках контакта и на кромку отверстия втулки, что препятствует совмещению и является причиной повреждения поверхностей деталей и их возможного заклинивания.

Существуют устройства для сборки деталей, в которых процесс совмещения обеспечивается вращающим моментом, приложенным к валу со стороны сборочного устройства [6]. В этом случае уравнения, определяющие минимальные значения сборочных усилий и сил взаимодействия, принимают вид

$$N_K (\cos \gamma + f \sin \gamma) - 2N_{B1} (\sin \alpha \sin \varepsilon - f \cos \varepsilon) = 0;$$

$$N_K (\sin \gamma - f \cos \gamma) + 2N_{B1} (\sin \alpha \cos \varepsilon + f \sin \varepsilon) - mg = 0;$$

$$M + mg (y_C - y_L) - f N_K LK - 2f N_{B1} LB = 0.$$

Анализ таких способов сборки показал, что силы взаимодействия в этом случае по мере приближения угла между осями к значению $\gamma = \arccos \frac{d}{D}$ также возрастают,

однако их значения на порядок меньше, чем в первом случае. Наименьшее значение силы взаимодействия будут иметь при сборке деталей устройствами со смещенными центрами тяжести, поскольку они будут определяться только силой тяжести вала. Следовательно, сборку легко повреждаемых деталей предпочтительнее производить устройствами, воздействующими на вал вращающими моментами, или устройствами, осуществляющими саморегулирование деталей при помощи искусственно смещенных центров тяжести.

Выводы

1. На основании кинематического анализа процесса сборки цилиндрических деталей установлены траектории и скорости точек подвижной детали, расположенных на ее поверхности, характеризующие процесс совмещения, что позволяет определять технологические требования, обеспечивающие автоматическую сборку цилиндрических деталей. Определены уравнения центроид, связанных с каждой деталью, соответствующих процессу совмещения деталей.

2. Для вертикальной схемы сборки предложена квазистатическая модель динамики стационарных состояний процесса силового взаимодействия вала и втулки, позволяющая определить области минимальных значений сборочных усилий и соответствующих им сил взаимодействия в точках контакта, что дает возможность в первом приближении оценивать эффективность и надежность способов сборки и проектируемых сборочных устройств.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Черняховская Л.Б.* Кинематический и динамический анализы автоматической сборки цилиндрических деталей: Монография. – Самара: Самар. гос. ун-т, 2011. – 76 с.
2. *Рабинович А.Н.* Проблемы ориентации деталей при автоматической сборке // Научные основы автоматической сборки. – М.: Машиностроение, 1976. – С. 120-131.
3. *Холодкова А.Г.* Особенности автоматического выполнения цилиндрических соединений с малыми зазорами // Сборка в машиностроении и приборостроении. – 2004. – № 4. – С. 14-17.
4. *Жарков Г.Е., Прилуцкий В.А.* Саморегулирование положения подвижной детали при сборке // Сборка в машиностроении и приборостроении. – 2012. – № 9. – С. 11-14.
5. Патент на изобретение № 1668090. МКИ В23 Р 19/04. Устройство для сборки цилиндрических деталей с гарантированным зазором. Сам. гос. техн. ун-т. Проничкин К.Б., Черняховская Л.Б.

Статья поступила в редакцию 1 июля 2013 г.

MATHEMATICAL ANALYSIS OF AUTOMATED PROCESS OF THE CYLINDRICAL DETAILS ASSEMBLE

L.B. Chernyahovskaya

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The vertical scheme of assembly of cylindrical details, during which one of them is fixed, and the other one moves, leaned on the edge of the other one, was analyzed. The fundamental laws of their matching were established. The trajectories and the velocities of the points located on the moving detail surface were determined. The equations of the centrodes rigidly connected to the details were obtained. The method of the calculation of the minimal assembling forces was proposed. The method of calculations of the range of minimal values of the forces both assembling and preventing from the assembling the details was proposed.

Keywords: *cylindrical parts, the automated assembly, three points of contact, trajectories, velocities, centrodes, assembling force.*