Краткие сообщения

УДК 330.4:517.9:519.865.3:339.137.2:621.396.218

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОНКУРЕНТНОГО ПОВЕДЕНИЯ ДВУХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ[1]

И.П. Болодурина, Т.А. Огурцова

Оренбургский государственный университет
460018, г. Оренбург, пр. Победы, 13
e-mail: prmat@mail.osu.ru

Исследована устойчивость нетривиального положения равновесия динамической модели конкурентного поведения двух экономических агентов, описанной системой нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Ключевые слова: *математическая модель, дифференциальные уравнения с запаздыванием, устойчивость, положение равновесия.*

В экономике, прогнозируя поведение отрасли на год, два или более, мы абстрагируемся от скачкообразных изменений структуры экономической системы, т. е. технологического времени производства, банкротства предприятия, слияния и т. д. Как следствие, происходит некоторое сглаживание динамического процесса, замена реальной траектории на модельную. Кроме того, большое значение имеет сильная нестационарность реального процесса, поскольку внешняя среда играет огромную роль при производстве, распределении и потреблении товаров и услуг. Учесть в полной мере все возмущающие факторы неспособна ни одна математическая модель, и поэтому понятие устойчивости при постоянно действующих возмущениях актуально и в экономической динамике. Устойчивость экономической модели подразумевает, что малые постоянно действующие возмущения изменяют динамический процесс мало, и если некоторая мера возмущений стремится к нулю, то и отклонения процесса уменьшаются до нуля [4].

Реальные данные об абонентской базе на российском рынке сотовой связи демонстрируют сложное взаимное поведение двух экономических агентов, рассматриваемых в данной работе. На динамику развития числа абонентов каждого оператора сотовой связи оказывают влияние множество факторов: экспоненциальный рост числа абонентов в отсутствие конкурентов, нелинейность во взаимодействии сотовых операторов, временной лаг, определяющий разницу во времени между измене-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, номер проекта 12-01-31325.

Ирина Павловна Болодурина (д.т.н., проф.), заведующая кафедрой «Прикладная математика».
Татьяна Александровна Огурцова, старший преподаватель кафедры «Прикладная математика».

ниями в рыночной ситуации и моментом принятия управленческих решений с целью реагирования на эти изменения, а также наличие конкурентов на рынке сотовой связи. Поэтому возникает проблема эффективного управления поведением предприятий сотовой связи с учетом фактора цены. Поставим задачу привлечения абонентов и, как следствие, увеличения прибыли первого экономического агента путем управления ценой за минуту связи. Для моделирования процесса управления введем показатель $u_i(t)$, характеризующий среднюю стоимость минуты пользования услугами связи оператора в момент времени t и удовлетворяющий ограничению

$$\alpha \le u_1(t) \le \beta, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

где α_i – минимальная средняя стоимость минуты связи, при которой затраты на издержки не превысят выручку, получаемую от использования услуг сотовой связи (себестоимость минуты связи);

β_i – максимальная средняя стоимость минуты связи, позволяющая оператору оставаться конкурентоспособным на рынке.

Использование логистической модели (2) Лотки – Вольтерра с запаздыванием во времени для описания конкурентного поведения предприятий сотовой связи позволяет учесть все вышеперечисленные факторы в полном объеме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)[\varepsilon_1 - \gamma_{11}x_1(t-\tau) - \gamma_{12}x_2(t-\tau)] - p_{11}u_1(t) - p_{12}u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)[\varepsilon_2 - \gamma_{21}x_1(t-\tau) - \gamma_{22}x_2(t-\tau)] - p_{21}u_1(t) - p_{22}u_2(t) \end{cases}, \tag{2}$$

где $x_i(t)$, $i = 1,2$ – число абонентов i-го оператора сотовой связи в момент времени t; ε_i, $i = 1,2$ – коэффициент прироста абонентской базы i-го оператора сотовой связи; γ_{ik}, $i,k = 1,2$ – коэффициент взаимного влияния i-го и k-го предприятий, предоставляющих услуги сотовой связи; p_{ik}, $i,k = 1,2$ – коэффициент влияния средней стоимости минуты на прирост числа абонентов i-го оператора сотовой связи; τ – временной лаг (запаздывание), связанный с разницей во времени между изменениями в рыночной ситуации и моментом принятия управленческих решений с целью реагирования на эти изменения.

Исследование поведения любой динамической системы сводится к изучению поведения фазовых траекторий в фазовом пространстве. Рассмотрим фазовый портрет в окрестности нетривиального положения равновесия неуправляемой системы (2) при нулевом запаздывании и при условии $u_i(t) = 0$, так как при малом положительном значении τ выводы о качественном поведении решений системы продолжают иметь место [1]:

$$(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = \left(\frac{\varepsilon_1\gamma_{22} - \varepsilon_2\gamma_{12}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}}; \frac{\varepsilon_2\gamma_{11} - \varepsilon_1\gamma_{21}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}} \right). \tag{3}$$

Исследуем на устойчивость стационарное состояние (3). Для этого рассмотрим малые возмущения неизвестных функций от состояния равновесия, положив

$$\begin{cases} x_1(t) \leftrightarrow \widetilde{x}_1(t) + \Delta x_1(t) \\ x_2(t) \leftrightarrow \widetilde{x}_2(t) + \Delta x_2(t) \end{cases}. \tag{4}$$

Подставим равенства (4) в систему (1), считая $\Delta x_1(t)$ и $\Delta x_2(t)$ величинами более высокого порядка малости [2]. Поскольку об устойчивости системы можно судить, ограничиваясь рассмотрением лишь уравнений первого приближения, то, отбрасывая слагаемые выше первого порядка малости, получим соответствующую систему

$$\begin{cases}\Delta\dot{x}_1(t) = \tilde{x}_1(t)[\varepsilon_1 - \gamma_{11}(\tilde{x}_1(t) + 2\Delta x_2(t)) - \gamma_{12}(\tilde{x}_2(t) + \Delta x_2(t))] + \Delta x_1(t)[\varepsilon_1 - \gamma_{12}\tilde{x}_2(t)] \\ \Delta\dot{x}_2(t) = \tilde{x}_2(t)[\varepsilon_2 - \gamma_{21}(\tilde{x}_1(t) + \Delta x_1(t)) - \gamma_{22}(\tilde{x}_2(t) + 2\Delta x_2(t))] + \Delta x_2(t)[\varepsilon_2 - \gamma_{21}\tilde{x}_1(t)]\end{cases} \qquad (5)$$

с начальными возмущениями $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$.

Следует отметить, что выводы, полученные с помощью линейных приближений, распространяются на исходных процесс и затем используются для прогнозирования или управления.

Вопрос об устойчивости системы в окрестности положения равновесия (3) сводится к исследованию собственных значений матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\varepsilon_2\gamma_{11}\gamma_{12} - \varepsilon_1\gamma_{11}\gamma_{22}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}} & \dfrac{\varepsilon_2\gamma_{12}^2 - \varepsilon_1\gamma_{12}\gamma_{22}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}} \\ \dfrac{\varepsilon_1\gamma_{21}\gamma_{12} - \varepsilon_2\gamma_{11}\gamma_{21}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}} & \dfrac{\varepsilon_1\gamma_{21}\gamma_{22} - \varepsilon_2\gamma_{11}\gamma_{22}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}} \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

то есть к определению решений характеристического уравнения

$$\lambda - R\lambda + Q = 0, \qquad (7)$$

где $R = \dfrac{\varepsilon_1\gamma_{22}(\gamma_{21} - \gamma_{12}) + \varepsilon_2\gamma_{11}(\gamma_{12} - \gamma_{22})}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}}$,

$$Q = \frac{\varepsilon_1^2\gamma_{12}\gamma_{21}\gamma_{22}(\gamma_{12} - \gamma_{22}) + \varepsilon_2^2\gamma_{11}\gamma_{12}(\gamma_{12}\gamma_{21} - \gamma_{11}\gamma_{22}) + \varepsilon_1\varepsilon_2\gamma_{12}(\gamma_{11}\gamma_{22}^2 - \gamma_{21}\gamma_{12}^2)}{(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21})^2}.$$

В работе [5] описана процедура идентификации параметров модели конкурентного поведения предприятий сотовой связи, в результате которой получена система дифференциальных уравнений с запаздыванием (8), описывающая динамику развития абонентской базы каждого из них:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = x_1(t)\cdot[0{,}294 - 0{,}0048\cdot x_1(t) - 0{,}00089\cdot x_2(t)], \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)\cdot[0{,}193 + 0{,}0043\cdot x_1(t) - 0{,}0034\cdot x_2(t)].\end{cases} \qquad (8)$$

Для случая отсутствия управляющего воздействия, то есть $u_1(t) = u_2(t) = 0$, характеристическое уравнение (7) имеет два положительных действительных корня $\lambda_1 = 0{,}43579$, $\lambda_2 = 0{,}06522$, что, по следствию из теоремы Стодола [3], доказывает неустойчивость стационарного решения системы (2).

Полученные результаты говорят о том, что деятельностью любого экономического агента необходимо управлять. Для того чтобы предприятию сотовой связи оставаться ведущим региональным оператором России, компания должна не только предлагать услуги сотовой связи в стационарном режиме, но вести ценовой демпинг.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В.* Дифференциальные уравнения: Учеб. для вузов. 2-е изд. / Под ред В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 348 с.

2. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. – 230 с.
3. *Болодурина И.П.* Исследование систем линейных дифференциальных уравнений. – Оренбург: ОГУ, 2004. – 98 с.
4. *Прасолов А.В.* Математические методы экономической динамики. – СПб.: СПбГУЭФ, 2008.
5. *Огурцова Т.А.* Идентификации параметров математической модели конкурентного поведения предприятий телекоммуникационной отрасли // Математика. Информационные технологии. Образование: III Всероссийская научно-практическая конференция. – Оренбург: ОГУ, 2011.

Статья поступила в редакцию 21 февраля 2013 г.

TO THE QUESTION OF THE STABILITY OF THE MATHEMATICAL MODEL OF COMPETITIVE BEHAVIOR OF THE TWO ECONOMIC AGENTS

I.P. Bolodurina, T.A. Ogurtzova

Orenburg State University, Orenburg

13, etc. Victory, Orenburg, 460018

e-mail: prmat@mail.osu.ru

The paper considers the stability of the nontrivial equilibrium position dynamic model of the competitive behaviour of the two economic agents, described the system of nonlinear differential equations with retarded argument.

***Keywords**: Mathematical model, differential equations with delay, stability, the position of equilibrium.*

Irina P. Bolodurina (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.
Tatyiana A. Ogurtzova, Senior Lecture.