Краткие сообщения

УДК 681.518.3

О ПРАВДОПОДОБНОМ ОЦЕНИВАНИИ ХАРАКТЕРИСТИК СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ

И.И. Волков, С.В. Федоров

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Рассматривается более простой алгоритм оценивания характеристик стационарного случайного процесса с экспоненциальной корреляционной функцией по сравнению с известными, не требующий решения системы нелинейных уравнений.

Ключевые слова: *стационарный случайный процесс, правдоподобное оценивание, экспоненциальный закон распределения, корреляционная функция.*

Как известно, оценки максимального правдоподобия при выполнении определенных условий обладают важными свойствами в теории оценивания. Они являются состоятельными, асимптотически нормальными и асимптотически эффективными. При заданном наборе выборочных данных, представляющих собой случайные величины, функция правдоподобия – это плотность совместного распределения этих величин, рассматриваемая как функция интересующих нас параметров.

Известно, что если случайные величины независимы, то совместная плотность распределения равна произведению плотностей распределения.

Пусть $x(t)$ – стационарный случайный процесс с математическим ожиданием m_x, дисперсией D_x и нормированной корреляционной функцией $\rho(R) = e^{-\alpha|\lambda|}$. Закон распределения процесса – нормальный.

Имеется выборка значений этого процесса $x_m \left(m = \overline{1, N+1}\right)$.

Выборочные данные имеют следующие характеристики:

$$m_x = M\left[x_m\right],$$

$$D_x = M\left[\left(x_m - m_x\right)^2\right],$$

$$M\left[\left(x_m - m_x\right)\left(x_{m+k} - m_x\right)\right] = D_x \lambda^{|k|},$$

$$\lambda = e^{-\alpha\Delta},$$

где Δ – шаг дискретизации;

m_x – математическое ожидание;

D_x – дисперсия.

Игорь Иванович Волков (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Информационные технологии».
Сергей Витальевич Федоров, преподаватель кафедры «Информационные технологии».

Осуществляя процедуру «отбеливания», сформируем независимые случайные величины.

Сформируем из исходных выборочных данных выборку величин:

$$z_m = (x_{m+1} - m_x) - \lambda(x_m - m_x), \qquad (1)$$

$$m = \overrightarrow{1, N}.$$

Эти величины имеют следующие характеристики:

$$M[Z_m] = 0,$$
$$D[Z_m] = D_x(1-\lambda^2), \qquad (2)$$
$$M[Z_m Z_k] = 0, m \neq k.$$

Данные величины некоррелированы и имеют нормальный закон распределения.

Получим функцию правдоподобия – совместный закон распределения этих величин:

$$\Psi(\lambda, D_x, m_x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} D_x^{\frac{N}{2}} (1-\lambda^2)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{\delta}{2D_x(1-\lambda^2)}}, \qquad (3)$$

где

$$\delta = \sum_{m=1}^{N} z_m^2. \qquad (4)$$

Будем искать оценки параметров m_x, D_x и λ исходя из обеспечения максимума функции правдоподобия.

Для этого необходимо выполнить необходимые условия экстремума функции:

$$\begin{cases} \dfrac{d\Psi}{dm_x} = 0, \\ \dfrac{d\Psi}{dD_x} = 0, \\ \dfrac{d\Psi}{d\lambda} = 0. \end{cases}$$

С учетом выражения (3) эти условия сведутся к следующим:

$$\frac{d\delta}{dm_x} = 0, \qquad (5)$$

$$D_x = \frac{\delta}{N(1-\lambda^2)}, \qquad (6)$$

$$2D_x N\lambda(1-\lambda^2) - (1-\lambda^2)\delta' - 2\lambda\delta = 0. \qquad (7)$$

Условие (7) с учетом выражения (6) примет следующий вид:

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = 0. \qquad (8)$$

Обеспечим выполнение условия (5) путем подстановки выражения (1) в соотношение (4):

$$\frac{d\delta}{dm_x} = -2(1-\lambda)\sum_{m=1}^{N}(x_{m+1} - m_x - \lambda(x_m - m_x)).$$

Преобразовав полученное выражение, получим, что условие (5) будет выполнено при

$$m_x = \frac{\sum_{m=1}^{N}\left(x_{m+1} - \lambda x_m\right)}{N(1-\lambda)}. \tag{9}$$

Введем обозначения:

$$\bar{x} = \frac{1}{N+1}\sum_{m+1}^{N+1} x_m, \tag{10}$$

$$x_m = x_m - \bar{x}.$$

Перепишем соотношение (9) в более простом виде:

$$m_x = \bar{x} + \frac{\lambda x_{N+1} - x_1}{N(1-\lambda)}. \tag{11}$$

Теперь обеспечим условие (8), которое с учетом выражения (4) примет вид

$$\sum_{m=1}^{N}\left(x_{m+1} - m_x - \lambda\left(x_m - m_x\right)\right)\left(x_m - m_x\right) = 0.$$

С учетом выражений (10) и (11) будем иметь:

$$\sum_{m=1}^{N}\left(x_{m+1} - \lambda x_m\right)x_m + \frac{x_{N+1}\left(x_1 - \lambda x_{N+1}\right)}{N} = 0.$$

Отсюда находим оценку значения параметра λ:

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{m=1}^{N} x_{m+1}x_m + \frac{x_1 x_{N+1}}{N}}{\sum_{m=1}^{N} x_m^2 + \frac{x_{N+1}^2}{N}}. \tag{12}$$

Обратимся к соотношению (4), которое на основании выражений (10) и (11) приведем к виду

$$\delta = \sum_{m=1}^{N}\left(x_{m+1} - \lambda x_m\right)^2 + \frac{\left(x_1 - \lambda x_{N+1}\right)^2}{N}. \tag{13}$$

Тогда с учетом выражения (6) имеем следующую оценку дисперсии:

$$\hat{D}_x = \frac{\sum_{m=1}^{N}\left(x_{m+1} - \hat{\lambda} x_m\right)^2 + \frac{\left(x_1 - \hat{\lambda} x_{N+1}\right)^2}{N}}{N(1-\hat{\lambda}^2)}. \tag{14}$$

Таким образом, оценивание параметров процесса осуществляется по соотношениям (10), (12), (14) и (11).

Для определения статистических погрешностей необходимо вычислить среднеквадратическое отклонение полученных оценок. Так как полученные оценки максимального правдоподобия получаются путем усреднения, данный алгоритм оценивания является традиционным. Оценки, полученные такими методами, обладают общими свойствами и соответствуют основным свойствам метода правдоподобного оценивания.

Преимущества метода максимального правдоподобия общеизвестны, но его широкое использование сдерживается сложностью вычислений. Данный подход позволяет существенно сократить вычислительную сложность и сделать метод максимального правдоподобия приемлимым для широкого использования в вопросах оценивания. Преимущество разработанного алгоритма заключается в уменьшении количества вычислительных процедур, а также в исключении погрешностей, которые неизбежно возникают при решении системы уравнений численными методами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Крамер Г.* Методы математической статистики. – М., 1975. – 648 с.
2. *Батищев В.И.* Аппроксимационные методы и системы промышленных измерений, контроля, испытаний, диагностики / В.И. Батищев, В.С. Мелентьев. – М.: Машиностроение-1, 2007. – 393 с.

Статья поступила в редакцию 14 октября 2013 г.

ON MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION OF CHARACTERISTICS OF STATIONARY STOCHASTIC PROCESS WITH EXPONENTIAL CORRELATION FUNCTION

I.I. Volkov, S.V. Fedorov

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

We discuss a simple algorithm for evaluating the characteristics of a stationary stochastic process with exponential correlation function which does not require solving a system of nonlinear equations.

Keywords: *stationary stochastic process, maximum likelihood estimation, exponential distribution, correlation function*

Igor I. Volkov (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.
SergeyV. Fedorov, Teacher.