УДК 517.951

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЪЕКТА С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

И.А. Данилушкин

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244

E-mail: idanilushkin@mail.ru

Рассматривается задача реализации численно-аналитической модели процесса диффузии, протекающей в реакторе с переменной скоростью движения потока. Предлагается подход к реализации модели в пакете численного моделирования динамических систем с сосредоточенными параметрами, основанный на смене ортогонального базиса в момент изменения скорости потока.

***Ключевые слова**: объект с распределёнными параметрами, диффузия, численно-аналитическая модель, ортогональный базис, пространство состояний.*

В работе [1] предложена математическая модель процесса изменения концентрации вещества по длине реактора в течение времени. Процесс описывается одномерным параболическим уравнением, учитывающим движение среды. Постановка задачи предполагает, что с начального момента времени $t = 0$ до некоторого времени t_0, вещество с известной концентрацией $C_{вх}(t) = C_{вх}$ поступает на вход реактора и движется по нему с постоянной скоростью $V(t) = V_0$. При этом в реакторе протекают и диффузионные процессы, вызывающие изменение концентрации по длине реактора.

Начиная с момента времени t_0, вещество перестаёт поступать на вход реактора, $V(t) = 0$, $t > t_0$. Движение среды в реакторе прекращается, и изменение концентрации вещества по длине реактора определятся только процессом диффузии.

Предложенная модель позволяет получить аналитическое решение, но не может быть использована для исследования системы автоматического управления концентрацией вещества в реакторе за счёт произвольного изменения скорости поступления вещества. Необходимо отметить, что исследование подобной системы автоматического управления возможно лишь с помощью современных пакетов компьютерного моделирования динамических систем, например Matlab/Simulink [2]. При этом объект управления может быть реализован либо с помощью конечно-элементного моделирования [3], либо путём реализации модели, основанной на аналитическом решении уравнения. Далее предлагается подход, позволяющий реализовать модель объекта в пакете компьютерного моделирования сосредоточенных динамических систем с сохранением особенностей поведения объектов с распределенными параметрами.

Уравнение, описывающее изменение концентрации вещества в реакторе имеет вид [1]

Иван Александрович Данилушкин (к.т.н.), доцент кафедры «Автоматика и управление в технических системах».

$$\frac{\partial C(l,t)}{\partial t}+V(t)\frac{\partial C(l,t)}{\partial l}=D\frac{\partial^2 C(l,t)}{\partial l^2}; \quad 0<l<L; \quad t>0, \tag{1}$$

с граничными и начальными условиями

$$-D\frac{\partial C(0,t)}{\partial l}=V(t)\left(C_{вх}(t)-C(0,t)\right); \quad \frac{\partial C(L,t)}{\partial l}=0; \tag{2}$$

$$C(l,0)=0, \tag{3}$$

где $C(l,t)$ − распределение концентрации вещества по длине реактора; $V(t)$ − скорость среды в реакторе; D − коэффициент диффузии; $C_{вх}(t)$ – концентрация вещества на входе в реактор; L – длина реактора.

Среда в реакторе принята несжимаемой, поэтому её скорость в каждый момент времени в любой точке реактора одинакова.

При постоянной скорости движения среды,

$$V(t)=V_0=const, \tag{4}$$

решение задачи (1)–(3) может быть найдено с помощью интегрирования по пространственной координате передаточной функции объекта $W(l,\eta,p)$, описывающегося уравнением (1) и стандартизирующей функции $\omega(l,p)$, учитывающей неоднородные граничные (2) и начальные условия (3) [4, 5].

$$C(l,p)=\int_0^L W(l,\eta,p)\omega(\eta,p)d\eta. \tag{5}$$

Передаточная функция объекта $W(l,\eta,p)$ может быть представлена в виде бесконечной суммы [1, 6]

$$W(l,\eta,p)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\lambda_n,l)\varphi_n(\lambda_n,\eta)\frac{K_n}{T_n p+1}, \tag{6}$$

где $\varphi_n(\lambda_n,l)$ – собственные функции, λ_n – собственные числа, K_n – коэффициенты усиления, T_n – постоянные времени, p – оператор Лапласа. Собственные числа λ_n краевой задачи (1)–(3) с учётом условия (4) являются бесконечно возрастающей последовательностью корней уравнения [1, 6]

$$\frac{tg(\lambda l)}{\lambda}=\frac{4DV_0}{4D^2\lambda^2-V_0{}^2}. \tag{7}$$

Собственные функции представляют собой ортогональный базис, т.е.

$$\int_0^L \varphi_n(\lambda_n,\eta)\varphi_m(\lambda_m,\eta)d\eta=\begin{cases} const, & при \quad n=m; \\ 0, & при \quad n\neq m, \end{cases} \tag{8}$$

коэффициенты K_n и постоянные времени T_n зависят от собственных чисел λ_n.

Благодаря свойству ортогональности собственных функций, можно перейти к рассмотрению временных мод объекта управления, зная, что каждая из них не зависит от остальных

$$C_n(p)=\frac{K_n}{T_n p+1}\omega_n(p), \quad n\in\{1, 2, ..., \infty\} \tag{9}$$

где $C_n(p)$, $\omega_n(p)$ – изображения по Лапласу временных мод выходного $C(l,p)$ и входного $\omega(l,p)$ сигналов объекта с распределёнными параметрами соответственно.

$$\omega_n(p) = \int_0^L \omega(\eta, p)\varphi_n(\lambda_n, \eta)d\eta, \quad n \in \{1, 2, ..., \infty\}. \tag{10}$$

Временные моды выходного сигнала используются для расчёта распределения концентрации вещества по длине реактора

$$C(l,p) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\lambda_n, l) C_n(p). \tag{11}$$

В основе современных пакетов компьютерного моделирования сосредоточенных динамических систем лежит алгоритм численного решения системы дифференциальных уравнений. Реализация математической модели объекта управления с распределёнными параметрами в подобном пакете осуществляется следующим образом:

1) ограничивается количество учитываемых слагаемых бесконечного ряда (11) $N = const < \infty$;

2) реализуется процедура расчёта временных мод входного сигнала $\omega(l,p)$, в каждый момент времени согласно уравнению (9). В большинстве практических случаев распределённый входной сигнал $\omega(l,p)$ может быть представлен в виде произведения двух функций, определяющих фиксированное пространственное распределение, $f(l)$, и изменение его амплитуды во времени, $u(p)$,

$$\omega(l,p) = f(l)u(p). \tag{12}$$

При таком фиксированном пространственном распределении входного сигнала процедура вычисления временных мод входного сигнала сводится к вычислению произведений функции $u(p)$ и соответствующих коэффициентов (из (11), с учётом (12)):

$$\omega_n(p) = u(p)\int_0^L f(\eta)\varphi_n(\lambda_n, \eta)d\eta = u(p)F_n, \quad n \in \{1, 2, ..., \infty\}; \tag{13}$$

3) формулируется задача вычисления поведения во времени N временных мод выходного сигнала $C_n(p)$, согласно (9);

4) для каждой точки l_i, $l_i \in [0, L]$, $i \in \{1, 2, ..., M\}$ в которой должно быть рассчитано значение выходного сигнала $C(l_i, p)$ реализуется расчёт согласно (11).

Более компактное представление модели можно получить, если сформулировать задачу моделирования в терминах пространства состояний. Для рассматриваемого случая, чтобы избежать путаницы в обозначениях, модель объекта в пространстве состояний будет записана в виде

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A1} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{w}; \\ \mathbf{y} = \mathbf{C1} \cdot \mathbf{x}, \end{cases} \tag{14}$$

где $\mathbf{x}$ – вектор состояния, $\mathbf{x} = [C_n(t)]_{N\times 1}$, $\mathbf{w}$ – вектор входных воздействий, $\mathbf{w} = [\omega_n(t)]_{N\times 1}$, $\mathbf{y}$ – вектор выходных сигналов, $\mathbf{y} = [C(l_i, t)]_{M\times 1}$. Матрица системы $\mathbf{A1}$ и матрица входа $\mathbf{B}$ определяются, исходя из выражения (9):

$$\mathbf{A1} = diag\{-1/T_1, -1/T_2, ..., -1/T_N\}, \quad \mathbf{B} = diag\{K_1/T_1, K_2/T_2, ..., K_N/T_N\}. \tag{15}$$

Матрица выхода **C1** определяется, согласно (11), как

$$\mathbf{C1} = \left[c1_{i,n}\right]_{M\times N} = \left[\varphi_n(\lambda_n, l_i)\right]_{M\times N}. \quad (16)$$

Если входное распределённое воздействие представлено в виде (12), то систему (14), с учётом (13) можно представить в виде

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A1}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{B1}\cdot u(t); \\ \mathbf{y} = \mathbf{C1}\cdot\mathbf{x}, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$\mathbf{B1} = \left[K_n F_n / T_n\right]_{N\times 1}. \quad (18)$$

Ненулевые начальные условия расчёта определяются значением вектора состояния $\mathbf{x}$ и могут быть рассчитаны в любой момент времени аналогично (10):

$$C_n(0) = \int_0^L C(\eta,0)\varphi_n(\lambda_n,\eta)d\eta, \quad n\in\{1, 2, ..., N\}. \quad (19)$$

Скачкообразное изменение скорости $V(t)$ в произвольный момент времени t_0 приведёт к изменению значений собственных чисел λ_n и всех зависящих от них значений элементов матриц $\mathbf{A1}$, $\mathbf{B1}$, $\mathbf{C1}$.

Обозначив новый ортогональный базис решения через $\hat{\varphi}_j(\hat{\lambda}_j, l)$, $j\in\{1, 2, ..., \infty\}$, можно сказать, что распределение концентрации $\hat{C}(l,t)$ после t_0, будет описываться бесконечным рядом

$$\hat{C}(l,t) = \sum_{j=1}^{\infty}\hat{\varphi}_j(\hat{\lambda}_j, l)\hat{C}_j(t). \quad (20)$$

При этом начальные условия для новой функции распределения определяется «старым» распределением в момент времени t_0:

$$\hat{C}(l,t_0) = C(l,t_0), \quad (21)$$

тогда разложение в ряд по собственным функциям нового базиса начального условия будет выглядеть так:

$$\hat{C}_j(t_0) = \int_0^L C(\eta,t_0)\hat{\varphi}_j(\hat{\lambda}_j,\eta)\,d\eta = \int_0^L\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\lambda_n,\eta)C_n(t_0)\hat{\varphi}_j(\hat{\lambda}_j,\eta)\,d\eta = \quad (22)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}C_n(t_0)\int_0^L\varphi_n(\lambda_n,\eta)\,\hat{\varphi}_j(\hat{\lambda}_j,\eta)\,d\eta, \quad j\in\{1, 2, ..., \infty\}.$$

И, с учётом ограничений на количество учитываемых в расчёте членов ряда,

$$\hat{C}_j(t_0) = \sum_{n=1}^{N}C_n(t_0)\int_0^L\varphi_n(\lambda_n,\eta)\hat{\varphi}_j(\hat{\lambda}_j,\eta)\,d\eta, \quad j\in\{1, 2, ..., N\}. \quad (23)$$

Таким образом, предложенный подход к моделированию объекта с распределёнными параметрами в пакете компьютерного моделирования сосредоточенных динамических систем предполагает, что в каждый момент изменения скорости потока будет производиться пересчёт собственных чисел решения и всех зависящих от них элементов матриц $\mathbf{A1}$, $\mathbf{B1}$, $\mathbf{C1}$. Начальное значение вектора состояния на момент переключения будет определяться с помощью (23).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мандра А.Г.* Математическое моделирование процесса диффузии как распределенного объекта управления с переменной структурой// Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки». Выпуск №4(32)–2011: Самара: СамГТУ, 2011. С. 229–232.
2. *Черных И.В.* SIMULINK: среда создания инженерных приложений/ Под общ. ред. к.т.н. В.Г. Потемкина.– М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2003. – 496 с.
3. *Дудников Е.Е.* Универсальные программные пакеты для моделирования систем с распределенными параметрами// Автоматика и телемеханика, №1.– 2009.– С. 3–24.
4. *Бутковский А.Г.* Структурная теория распределенных систем.– М.: Наука, 1977.– 320 с.
5. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высш. шк., 2003. – 299 с.
6. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.

Статья поступила в редакцию 31 октября 2013 г.

NUMERICAL-ANALYTICAL MODEL OF A DISTRIBUTED PARAMETER PLANT WITH VARIABLE STRUCTURE

I.A. Danilushkin

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The paper is about the problem of implementation of the numerical-analytical model of the diffusion process that flows in a reactor with a variable rate of flow. The author offers an approach to the implementation of the model in simulating software for dynamic systems with lumped parameters based on a change of orthogonal basis in the moment of changing the flow rate.

Keywords*: plant with distributed parameters, diffusion, numerical-analytical model, orthogonal basis, state space.*

Ivan A. Danilushkin (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.