

УДК 621.3.078

## УЛУЧШЕНИЕ СВОЙСТВ ЦИФРОВЫХ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ С МАЛЫМИ ПЕРИОДАМИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

*А.В. Стариков, И.С. Беляева, Д.Н. Джабасова*

Самарский государственный технический университет  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

*Рассмотрена простейшая цифровая одноконтурная системы управления с пропорционально-дифференциальным регулятором. Показано, что при малых периодах дискретизации и больших постоянных времени дифференцирования коэффициент передачи цифрового регулятора становится очень большим и может вступить в противоречие с процессом дискретизации по уровню и ограничением сигналов по величине. Предложен новый способ вычисления производной, отличающийся как простотой технической реализации, так и улучшением свойств цифровых дифференцирующих устройств. Получены дискретные передаточные функции нового цифрового пропорционально-дифференциального регулятора и рассматриваемой одноконтурной системы. Показано, что предложенный способ дифференцирования позволяет улучшить качество переходных процессов в цифровой системе управления.*

**Ключевые слова:** цифровое дифференцирование, дискретная передаточная функция, система управления, первая обратная разность, период дискретизации.

В системах управления часто применяют операции дифференцирования. Например, если объект управления представляет собой последовательное соединение двойного аperiodического звена с интегрирующим:

$$W_{oy}(p) = \frac{x(p)}{N(p)} = \frac{k_{oy}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p}, \quad (1)$$

где  $N(p)$  – изображение Лапласа входного воздействия;  $x(p)$  – изображение выходной координаты;  $p$  – комплексная переменная;  $k_{oy}$  – коэффициент передачи;  $T_1$  и  $T_2$  – постоянные времени объекта управления, причем для определенности будем считать, что  $T_1 \ll T_2$ , то одним из способов повышения быстродействия системы является применение пропорционально-дифференциального (ПД) регулятора с передаточной функцией:

$$W_{пд}(p) = k_{пд}(T_{пд} p + 1), \quad (2)$$

где  $k_{пд}$  и  $T_{пд}$  – коэффициент передачи и постоянная времени ПД-регулятора соответственно.

Этот регулятор предназначен для компенсации наибольшей постоянной времени объекта управления, поэтому логично приравнять  $T_{пд} = T_2$ . Для организации пропорционально-дифференциального закона регулирования необходимо

---

*Александр Владимирович Стариков (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Электропривод и промышленная автоматика».*

*Ирина Сергеевна Беляева, аспирант.*

*Дарья Назымбековна Джабасова, аспирант.*

вычислить производную от воздействия на входе регулятора и умножить полученную величину на постоянную времени  $T_{ПД}$ .

Рассмотрим одноконтурную систему, замкнутую с помощью безынерционного датчика обратной связи с коэффициентом передачи  $k_{oc}$  с объектом управления вида (1) и с ПД-регулятором (2) (рис. 1). Передаточная функция такой замкнутой системы принимает вид

$$W_{зам}(p) = \frac{x(p)}{x_3(p)} = \frac{1}{k_{oc} \left( \frac{T_1}{k_{oy} k_{ПД} k_{oc}} p^2 + \frac{1}{k_{oy} k_{ПД} k_{oc}} p + 1 \right)},$$

где  $x_3(p)$  – изображение сигнала задания.

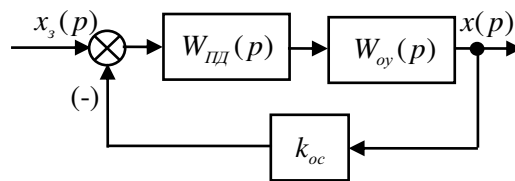


Рис. 1. Структурная схема одноконтурной системы управления с ПД-регулятором

При  $k_{oy} = 1$ ,  $k_{ПД} = 1$ ,  $k_{oc} = 100$  и  $T_1 = 0,01$  с переходный процесс в рассматриваемой непрерывной системе будет характеризоваться временем входа в 2%-ю зону  $t_m = 0,0808$  с и перерегулированием  $\sigma = 16,3\%$  (рис. 2).

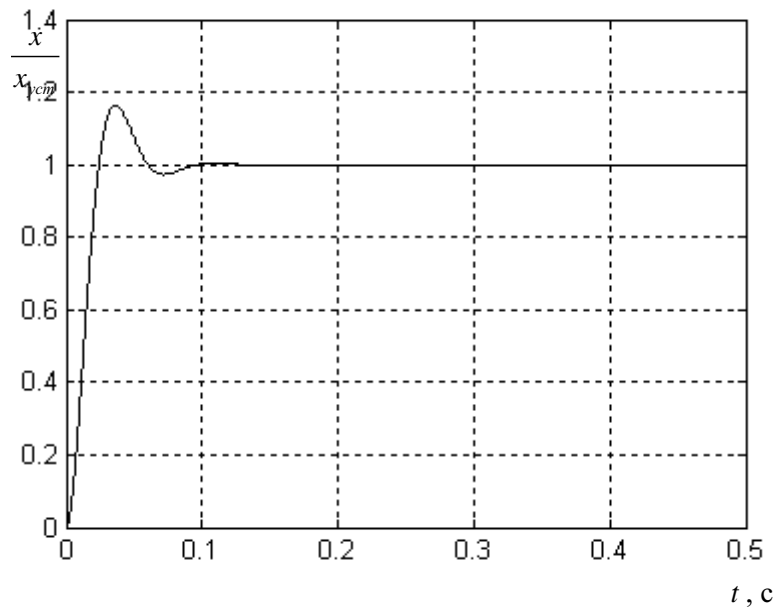


Рис. 2. График переходного процесса в рассматриваемой непрерывной системе

Но при цифровой технической реализации на работу системы будут оказывать существенное влияние квантование по времени, уровню и ограничение разрядной сетки устройства (рис. 3). Квантование по времени можно учесть с помощью  $z$ -преобразования и дискретных передаточных функций. Дискретная передаточная функция объекта управления вида (1) в случае применения экстраполятора нулевого порядка

$$W_0(z) = \frac{x(z)}{x_s(z)} = k_{oy} \frac{az^2 + bz + c}{(z-1)(z-d_1)(z-d_2)}, \quad (3)$$

$$\text{где } a = [T(T_2 - T_1) + T_1^2(1-d_1) - T_2^2(1-d_2)] \frac{1}{T_2 - T_1};$$

$$b = [T_2^2(1+d_1-d_2-d_1d_2) - T_1^2(1+d_2-d_1-d_1d_2) - T(T_2 - T_1)(d_1+d_2)] \frac{1}{T_2 - T_1};$$

$$c = [T(T_2 - T_1)d_1d_2 - T_2^2d_1(1-d_2) + T_1^2d_2(1-d_1)] \frac{1}{T_2 - T_1};$$

$$d_1 = e^{-\frac{T}{T_1}}; d_2 = e^{-\frac{T}{T_2}}; z = e^{pT};$$

$T$  – период квантования (дискретизации) по времени.

Как правило, при цифровом дифференцировании используются простейшие способы определения производной, например как первой обратной разности [1]. Тогда дискретная передаточная функция ПД-регулятора будет иметь вид

$$W_{ПД}(z) = \frac{x_{ПД}(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{k_{ПД}(T_{ПД} + T)}{T} \frac{\left(z - \frac{T_{ПД}}{T_{ПД} + T}\right)}{z}, \quad (4)$$

где  $x_{ПД}(z)$  – изображение ( $z$ -преобразование) выходного сигнала ПД-регулятора;  $\varepsilon(z)$  – изображение рассогласования на входе этого регулятора.

Пропорционально-дифференциальный регулятор предназначен для компенсации наибольшего полюса передаточной функции (3), поэтому

$$\frac{T_{ПД}}{T_{ПД} + T} = d_2. \quad (5)$$

С учетом (5) дискретная передаточная функция замкнутой системы будет представлять собой динамическое звено третьего порядка:

$$W(z) = \frac{x(z)}{x(z)} = \frac{b_0z^2 + b_1z + b_2}{a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3}, \quad (6)$$

$$\text{где } b_0 = \frac{k_{ПД}(T_{ПД} + T)k_{oy}a}{T}; b_1 = \frac{k_{ПД}(T_{ПД} + T)k_{oy}b}{T}; b_2 = \frac{k_{ПД}(T_{ПД} + T)k_{oy}c}{T};$$

$$a_0 = 1; a_1 = -\left[1 + d_1 - \frac{k_{ПД}(T_{ПД} + T)k_{oy}k_{oc}a}{T}\right]; a_2 = d_1 + \frac{k_{ПД}(T_{ПД} + T)k_{oy}k_{oc}b}{T};$$

$$a_3 = \frac{k_{ПД}(T_{ПД} + T)k_{oy}k_{oc}c}{T}.$$

Она позволяет определить показатели качества регулирования в цифровой

системе с учетом квантования по времени и найти зависимость устойчивости от периода дискретизации  $T$ . Следует отметить, что при периоде дискретизации  $T = 0,0001$  с переходный процесс, построенный по передаточной функции (6), практически совпадает с графиком, приведенном на рис. 2.

Однако формула (4) показывает, что при малых периодах дискретизации коэффициент передачи цифрового ПД-регулятора становится очень большим и может вступить в противоречие с процессом дискретизации по уровню и ограничением сигналов по величине. Структурная схема рассматриваемой цифровой одноконтурной системы (рис. 3) позволяет исследовать влияние этих нелинейностей на показатели качества регулирования. Компьютерное моделирование (рис. 4, кривая 1) позволяет сделать вывод, что процесс квантования по уровню в сочетании с ограничением сигналов по уровню приводит к существенному увеличению перерегулирования ( $\sigma = 43\%$ ) и времени переходного процесса ( $t_m = 0,5462$  с).

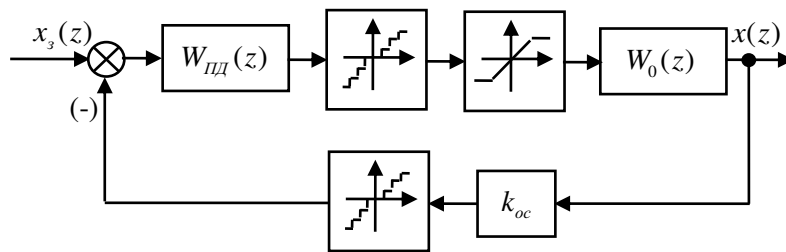


Рис. 3. Структурная схема одноконтурной системы управления с ПД-регулятором

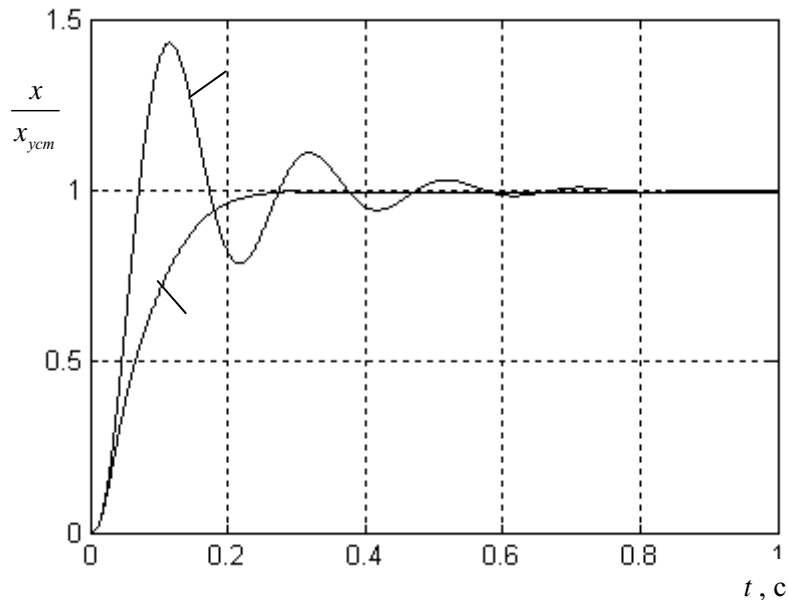


Рис. 4. Графики переходных процессов в рассматриваемой цифровой системе с учетом квантования по уровню и ограничения выходного сигнала регулятора

Для улучшения свойств цифрового ПД-регулятора и всей системы в целом предлагается производить вычисление производной по формуле

$$\nabla \varepsilon[n] = \varepsilon[n] - \varepsilon[n-m], \quad (7)$$

где  $n$  и  $m$  – целые числа, причем  $n$  – текущий такт вычислений,  $m$  – число тактов запаздывания, а расчет выходной величины регулятора по выражению

$$x_{\text{ПД}}[n] = k_{\text{ПД}} \left\{ \frac{T_{\text{ПД}}}{mT} \varepsilon[n] - \frac{T_{\text{ПД}}}{mT} \varepsilon[n-m] + \varepsilon[n] \right\}.$$

Формула (7) показывает, что при вычислении производной как первой обратной разности осуществляется ее усреднение за  $m$  тактов. Дискретная передаточная функция ПД-регулятора при этом примет вид

$$W_{\text{ПД}}^y(z) = \frac{x_{\text{ПД}}(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{k_{\text{ПД}}(T_{\text{ПД}} + mT)}{mT} \frac{\left( z^m - \frac{T_{\text{ПД}}}{T_{\text{ПД}} + mT} \right)}{z^m}, \quad (8)$$

а динамические свойства замкнутой системы будет характеризоваться передаточной функцией:

$$W_{\text{зам}}^y(z) = \frac{x(z)}{x_3(z)} = \frac{b_{01}z^{m+2} + b_{11}z^{m+1} + b_{21}z^m + b_m z^2 + b_{m+1}z + b_{m+2}}{a_{01}z^{m+3} + a_{11}z^{m+2} + a_{21}z^{m+1} + a_{31}z^m + a_{m+1}z^2 + a_{m+2}z + a_{m+3}},$$

$$\text{где } b_{01} = \frac{k_{\text{ПД}}(T_{\text{ПД}} + mT)k_{\text{oy}}a}{mT}; \quad b_{11} = \frac{k_{\text{ПД}}(T_{\text{ПД}} + mT)k_{\text{oy}}b}{mT}; \quad b_{21} = \frac{k_{\text{ПД}}(T_{\text{ПД}} + mT)k_{\text{oy}}c}{mT};$$

$$b_m = -ad_2; \quad b_{m+1} = -bd_2; \quad b_{m+2} = -cd_2; \quad a_{01} = 1;$$

$$a_{11} = - \left[ 1 + d_1 + d_2 - \frac{k_{\text{ПД}}(T_{\text{ПД}} + mT)k_{\text{oy}}k_{\text{oc}}a}{mT} \right];$$

$$a_{21} = d_1d_2 + d_1 + d_2 + \frac{k_{\text{ПД}}(T_{\text{ПД}} + mT)k_{\text{oy}}k_{\text{oc}}b}{mT}; \quad a_{31} = - \left[ d_1d_2 - \frac{k_{\text{ПД}}(T_{\text{ПД}} + mT)k_{\text{oy}}k_{\text{oc}}c}{mT} \right];$$

$$a_{m+1} = - \frac{k_{\text{ПД}}(T_{\text{ПД}} + mT)k_{\text{oy}}k_{\text{oc}}ad_2}{mT}; \quad a_{m+2} = - \frac{k_{\text{ПД}}(T_{\text{ПД}} + mT)k_{\text{oy}}k_{\text{oc}}bd_2}{mT};$$

$$a_{m+3} = - \frac{k_{\text{ПД}}(T_{\text{ПД}} + mT)k_{\text{oy}}k_{\text{oc}}cd_2}{mT}.$$

При  $m=2$  коэффициенты  $b_{21}$  и  $a_{31}$  должны рассчитываться по формулам:

$$b_{21} = \frac{k_{\text{ПД}}(T_{\text{ПД}} + mT)k_{\text{oy}}c}{mT} - ad_2; \quad a_{31} = - \left[ d_1d_2 - \frac{k_{\text{ПД}}(T_{\text{ПД}} + mT)k_{\text{oy}}k_{\text{oc}}(c - ad_2)}{mT} \right].$$

Моделирование рассматриваемой системы (рис. 4, кривая 2) с ПД-регулятором вида (8) и с учетом квантования сигналов по уровню и ограничению по величине показывает, что при  $m=4$  значительно улучшаются показатели качества регулирования. Действительно, в этом случае перерегулирование равно 0, а время переходного процесса составляет  $t_m = 0,2279$  с.

Следует также отметить, что применение предлагаемого подхода к опреде-

лению производной в дифференцирующих устройствах и ПД-регуляторах сохраняет ту же простоту вычислений, что и при нахождении первой обратной разности. Это позволяет, в частности, проектировать такие цифровые системы, в которых операции умножения заменяются процедурами сдвига, что значительно упрощает техническую реализацию и снижает стоимость управляющего устройства.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Микропроцессорные системы автоматического управления / В.А. Бесекерский, Н.Б. Ефимов, С.И. Знатдинов и др.; Под общ. ред. В.А. Бесекерского. – Л.: Машиностроение, 1988. – 365 с.

*Статья поступила в редакцию 5 февраля 2014 г.*

## IMPROVEMENT OF PROPERTIES OF DIGITAL DIFFERENTIATING DEVICES WITH THE SMALL SAMPLING TIMES

***A. V. Starikov, I. S. Belyaeva, D. N. Jabasova***

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia

*The simplest digital single-loop control systems with the proportional-differential regulator is considered. It is shown that at the small sampling times and the big constants of time of differentiation the factor of transfer of a digital regulator becomes very big and can conflict to digitization process on level and restriction of signals on size. The new way of calculation of the derivative, unlike both simplicity of technical realization, and improvement of properties of digital differentiating devices is offered. Discrete transfer functions of a new digital proportional-differential regulator and considered single-loop system are received. It is shown that the offered way of differentiation allows to improve quality of transients in a digital control system.*

**Keywords:** *the digital differentiation, discrete transfer function, a control system, the first inverted difference, sampling time.*

---

*Alexander V. Starikov (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.  
Irina S. Belyaeva, Postgraduate Student.  
Daria N. Jabasova, Postgraduate Student.*