

## Энергетика

УДК 681.5

### ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В УСЛОВИЯХ ДЕКОМПОЗИЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

**Т.А. Бенгина**

Самарский государственный технический университет  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

*Предлагается новый подход к задаче оптимального управления процессом газового азотирования по критерию максимальной производительности установки в условиях заданного качества азотирования при выполнении технологических ограничений. В отличие от известных постановок аналогичных задач проведена декомпозиция математической модели процесса на две краевые задачи оптимального управления процессом массопереноса и теплопроводности с подвижным правым концом траектории в негладкой бесконечномерной области пространства состояний. В качестве метода решения параметризованной оптимальной задачи принят альтернативный метод оптимизации.*

**Ключевые слова:** газовое азотирование, тепломассоперенос, оптимальное управление, декомпозиция модели, минимаксная оценка отклонения, альтернативный метод оптимизации.

Для увеличения ресурса работы деталей с трущейся поверхностью широко используется химико-термическая обработка. Одним из видов такой обработки является диффузионное насыщение поверхностного слоя стали азотом (азотирование), которое значительно повышает твердость, износостойкость и коррозионную стойкость поверхностного слоя изделия.

Однако проблема автоматического управления подобным процессом тепломассопереноса к настоящему времени не может считаться решенной. Причина заключается в сложном и многостороннем характере связей – эксплуатационных характеристик: твердости и износостойкости азотированных деталей с управляющими воздействиями – параметрами технологического процесса. Осложняет ситуацию многофазный состав поверхностного упрочненного слоя, что резко затрудняет задачу построения адекватной математической модели, пригодной для использования при решении задач оптимального управления технологией азотирования.

В условиях существенно малой глубины азотированного слоя по сравнению с толщиной детали математическое описание диффузии азота в каждой  $i$ -ой фазе, принимает форму дифференциального уравнения диффузии для бесконечной пластины толщиной  $2R$ :

---

Татьяна Алексеевна Бенгина (к.т.н.), доцент кафедры «Высшая математика и прикладная информатика».

$$\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D_i(C) \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x_i} \right), \quad (1)$$

где  $\tau > 0$ ,  $0 < x < R$ ,  $D_i(C)$  – коэффициент диффузии азота в  $i$ -ой фазе;

$C(x, \tau)$  – концентрация азота в точке  $x$ , в момент времени  $\tau$ .

Начальное распределение концентрации диффундирующего элемента в слое  $C_0(x)$  и положение межфазных границ  $\xi_{i0}(x)$  может быть произвольным.

$$C(x, 0) = C_0(x); \quad (2)$$

$$\xi_i(x, \tau)|_{\tau=0} = \xi_{i0}(x). \quad (3)$$

Физику переноса азота из атмосферы на поверхность детали наиболее адекватно отражают граничные условия третьего рода:

$$-D_i \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=R} = \beta_i (\Pi_N^0 - \Pi_N^i), \quad (4)$$

где  $\beta_i$  – коэффициент массопереноса для  $i$ -ой фазы;

$$\Pi_N^0 = \frac{P_{NH_3}}{P_{H_2}} - \text{азотный потенциал печной атмосферы};$$

$P_{NH_3}, P_{H_2}$  – парциальные давления аммиака и водорода соответственно;

$\Pi_N^i$  – равновесный азотный потенциал соответствующей фазы.

Граничное условие на левой границе имеет вид условия симметрии:

$$\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (5)$$

Условия на границах раздела фаз

$$C(x_i, \tau)|_{x_i=\xi_{i-0}} = C_i^-; \quad (6)$$

$$C(x_i, \tau)|_{x_i=\xi_{i+0}} = C_i^+.$$

Закон движения границы, разделяющей две различные фазы, выражающий собой условие баланса вещества при фазовых переходах, имеет вид:

$$j_i \frac{\partial \xi_i}{\partial \tau} = D_i \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{\xi_{i+0}} - D_{i-1} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-0}}, \quad (7)$$

где  $j_i = C_i^- - C_i^+$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N$  – общее число областей, разделенных фазовыми переходами [4,5,6].

Конструктивные математические модели тепломассопереноса в качестве существенной компоненты содержат модель нагрева детали.

Температура азотируемой детали оказывает существенное влияние на твердость азотированного слоя, размеры и его фазовый состав. Процесс нагрева и термообработки определяет размеры зерна, скорость роста и распределение нитридов, определяет скорость диффузии атомов азота в каждой фазе.

Процесс нагрева детали описывается линейным одномерным уравнением теплопроводности Фурье, относящимся к классу уравнений математической физики параболического типа для распределения относительной температуры

$\theta(l, \tau) = \frac{T(x, \tau) - T^*}{q_{\max} R^2}$  по относительной глубине  $l = \frac{x}{R}$ , в предположении равно-

мерного относительного потока  $\tilde{q} = \frac{q(\tau)}{q_{\max}}$  тепла по её поверхности.

$$\frac{\partial \theta(l, \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial l^2} + \frac{\Pi}{l} \frac{\partial \theta}{\partial l} = 0, \forall l \in [0, 1], \forall \tau \in (0, \infty]; \quad (8)$$

$$\theta(l, \varphi)|_{\varphi=0} = v, \forall l \in [0, 1]; \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(l, \varphi)}{\partial l} \right|_{l=0} = 0, \forall \tau \in [0, \infty]; \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(l, \varphi)}{\partial l} \right|_{l=1} = \tilde{q}(\varphi), \forall \tau \in [0, \infty]. \quad (11)$$

Здесь  $\varphi = \frac{a\tau}{R^2}$  – относительное время;

$a$  – коэффициент температуропроводности материала азотируемой детали [1, 7, 8].

При этом без большой погрешности форму детали можно считать канонической – бесконечным цилиндром ( $\Pi=1$ ) с радиусом  $R$  или бесконечной пластиной ( $\Pi=0$ ) толщиной  $2R$ .

При анализе рассматриваемого технологического процесса азотирования, очевидно, что величина абсолютного отклонения распределения азота от требуемого непосредственно влияет на эксплуатационные свойства изделия. Технология азотирования не допускает повышения абсолютной величины отклонений от заданного состояния. Допустимая абсолютная погрешность распределения азота по глубине составляет  $\pm 10 \div 15\%$ . Поэтому в качестве критерия точности или ограничений в задаче быстрогодействия в работе используется минимаксная оценка отклонения [1].

Таким образом, технологически обоснованная исходная постановка векторной задачи оптимального управления процессом газового азотирования имеет следующий вид.

Для объекта в форме (1)-(7); (8)-(11) определить вектор-функцию управления

$$v(\varphi) = \left[ \Pi_N^0(\tau), \tilde{q}(\varphi) \right]^T, \quad (12)$$

переводящую объект (1)-(7); (8)-(11) из определенного начального состояния (2), (3), (9) в допустимую конечную область

$$\Omega_{c\theta} = \Omega_c \cup \Omega_\theta = \left\{ C(x, \varphi) : \max \left| C(x, \varphi) \Big|_{\varphi=\varphi^0} - C^*(x) \right| \leq \varepsilon_N^{zad}; \right. \\ \left. T(l, \varphi) : \max \left| T(l, \varphi) \Big|_{\varphi=\varphi^0} - T^* \right| \leq \varepsilon_T^{zad} \right\} \quad (13)$$

при заданном уровне отклонений  $\varepsilon_N^{zad}$  и  $\varepsilon_T^{zad}$  конечного состояния  $C(x, \tau^0), T(x, \tau^0)$  от требуемого профиля  $C^*(x)$  и требуемой постоянной температуры азотирования  $T^* = const$  за минимальное время  $\tau^0$  в условиях выполнения ограничений

$$C_{\min}^i(x, \tau) \leq C^i(x, \tau) \leq C_{\max}^i(x, \tau), i = \alpha, \beta, \gamma ; \quad (14)$$

$$\Pi_{\min} \leq \Pi_N^0(\tau) \leq \Pi_{\max} ; \quad (15)$$

$$\tilde{q}_{\min} \leq \tilde{q}(\varphi) \leq \tilde{q}_{\max} = 1 . \quad (16)$$

Строгое решение поставленной векторной задачи затруднительно, однако реальная промышленная технология азотирования позволяет произвести упрощающую редукцию этой задачи. В качестве идеи модификации задачи, к виду, поддающемуся аналитическому решению, рассматривается возможность имитации условий Стефана. При этом используются фиктивные источники  $q_1, q_2$ , распределенные для каждой из фаз от подвижной границы на область, лежащую вне существования соответствующей фазы, с одновременным дополнением пространственной области существования каждой из фаз до полупространства  $[0, \infty]$  [1,8]. В линеаризованной форме краевой задачи Стефана (1)-(7) при условии  $D_i(C) = D_i$  независимости коэффициента диффузии в каждой фазе от концентрации в ней азота, можно записать формальные решения следующих эквивалентных ей линейных задач при произвольных зависимостях  $\xi(t), q_1(x, t), q_2(x, t), \psi(x)$  и  $\varphi_2(t)$  :

$$\frac{\partial C_1}{\partial \tau} = D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + q_1(x, \tau) H[(x - \xi(\tau))]; \tau > 0; 0 < x < \infty; \quad (17)$$

$$\hat{\Gamma}_1 C_1 \Big|_{x=0} = \varphi_1(\tau) ; \quad (18)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0 ; \quad (19)$$

$$C_1 \Big|_{\tau=0} = \psi_1(x) ; \quad (20)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial \tau} = D_2 \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + q_2(x, \tau) (H(x) - H[(x - \xi(\tau))]); \tau > 0; 0 < x < \infty; \quad (21)$$

$$\hat{\Gamma}_2 C_2 \Big|_{x=0} = \varphi_2(\tau) ; \quad (22)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0 ; \quad (23)$$

$$C_2 \Big|_{\tau=0} = \psi_2(x) ; \quad (24)$$

$$j_i \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = D_2 \frac{\partial C_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi(\tau)+0} - D_1 \frac{\partial C_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi(\tau)-0} ; \quad (25)$$

$$\xi(\tau) \Big|_{\tau=0} = 0 ; \quad (26)$$

$$C_1 \Big|_{x=\xi(\tau)} = 0 ; \quad (27)$$

$$C_2 \Big|_{x=\xi(\tau)} = 0 . \quad (28)$$

Здесь  $\hat{\Gamma}_2 \Big|_{x=0}$  – линейный дифференциальный оператор;

$\psi_1(x), \varphi_2(\tau)$  – произвольные достаточно гладкие функции;

$q_1(x, \tau)$ ,  $q_2(x, \tau)$  – функции, имитирующие влияние границы раздела фаз, на которые накладываются определяющие условия (25)-(28).

Индекс «1» относится к новой фазе, существующей при  $0 < x < \xi(t)$ , индекс «2» – к старой фазе, существующей при  $x > \xi(t)$  [1,7,8].

Предложенный метод позволяет получить решение линеаризованной проблемы Стефана и эффективно использовать полученное решение в оптимизационных процедурах. Результаты контрольных расчетов, представленные на рисунке, подтвердили адекватность модели экспериментальным данным.

Линеаризация системы (1)-(7) и адекватное приведение её к форме (17)-(28) позволяет произвести одностороннее и двухстороннее преобразование Фурье по пространственным координатам  $x(l)$  в краевых задачах (8)-(11) и (17)-(28).

Для уравнений (17) и (21) с краевыми условиями (18)-(20) и (22)-(24) в полубесконечной области в трансформантах Фурье  $Z_i^c$   $C(x, \tau)$  получена бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dZ_i^c(jw)}{d\tau} + w^2 Z_i^c(jw) - \bar{q}_{ji}(\tau) - \beta_{ji} \Pi_N^0(\tau), \quad i = \overline{0, \infty}, \quad j = \alpha, \beta, \gamma. \quad (29)$$

Краевая задача (8)-(11) в трансформантах Фурье  $Z_i^T$   $\theta(l, \varphi)$  примет вид бесконечной системы

$$\frac{dZ_i^T}{d\varphi} + \mu_i^2 Z_i^T + \bar{q}_i(\varphi) = 0, \quad (30)$$

$$\mu_i = \arg(\sin \mu_i = 0), \quad i = \overline{0, \infty}. \quad (31)$$



Распределение азота для технического железа,  
 А – требуемое распределение для стали 38Х2МЮА

Для системы уравнений (29), (30) процедура принципа максимума Потрягина в поставленной задаче быстрого действия позволяет утверждать, что компонен-

ты оптимальной вектор-функции  $\Pi_N^0(\tau)$  и  $\tilde{q}(\varphi)$  имеют характер релейных функций, попеременно принимающих свои граничные значения согласно (15), (16) [2,3,9].

Таким образом, с учетом взаимно-однозначного соответствия объектов (17)-(28) и (29); (8)-(11) и (30) задача параметризуется и сводится к определению продолжительности  $(\Delta_{Cj})$  и  $(\Delta_{Ti})$  и количества  $j=1,2,\dots,J$ ,  $i=1,2,\dots,I$  интервалов постоянства оптимального управления  $\Pi_{N\text{onm}}^0(\tau) = \Pi_{N\text{onm}}^0(\Delta_{Cj})$  и  $\tilde{q}_{\text{onm}}(\varphi) = \tilde{q}_{\text{onm}}(\Delta_{Ti})$ .

В условиях постоянства коэффициентов краевой задачи (17)-(28), в узком диапазоне температур, допустимых в ходе азотирования, задачи управления объектами (8)-(11) и (17)-(28) могут решаться автономно.

В качестве метода решения параметризованной оптимальной задачи принят альтернативный метод оптимизации (АМО) [9,10]. При этом определяются не только количество  $i$  и  $j$  и длительности интервалов постоянства оптимального управления, но и предельно допустимые в каждом  $i$ -м и  $j$ -м подмножестве управлений отклонения

$$\varepsilon_N = \varepsilon_{N\min}^{(j)} = \max_x |C(x, \tau^{(j)}) - C^*(x)| \quad (32)$$

$$\varepsilon_T = \varepsilon_{T\min}^{(i)} = \max_l |T(l, \varphi^{(i)}) - T^*|, \quad (33)$$

где  $\tau^j = \sum_{n=1}^j \Delta_n^\tau$ ;  $\varphi^i = \sum_{n=1}^i \Delta_n^\varphi$ .

Полученные таким образом из решения определяющей системы алгебраических трансцендентных уравнений в процедуре АМО решения задачи максимальной точности  $\varepsilon_{N\min}^{(j)}$  и  $\varepsilon_{T\min}^{(i)}$  в каждом  $j$ -м или  $i$ -м классе управлений составляют ряд неравенств:

$$\varepsilon_{N\min}^{(1)} > \varepsilon_{N\min}^{(2)} > \dots > \varepsilon_{N\min}^{(j)} \dots \geq \varepsilon_{\inf C} = 0. \quad (34)$$

$$\varepsilon_{T\min}^{(1)} > \varepsilon_{T\min}^{(2)} > \dots > \varepsilon_{T\min}^{(i)} \dots \geq \varepsilon_{\inf T} = 0. \quad (35)$$

Точность, достигаемая согласно (34) в классе одноинтервальных управлений  $\varepsilon_{N\min}^{(1)} < \varepsilon_N^{\text{зад}}$ , позволяет ограничиться одноинтервальным управлением по азотному потенциалу в задаче быстрогодействия, т.е.  $\Pi_{N\text{onm}}^0(\tau) = \Pi_{N\text{onm}}^0(\Delta_{C1})$ .

В рассматриваемом примере  $\Delta_{C1} = 9$  часов,  $\Pi_{N\max} = 2,64$ .

Таким образом, необходимо решение задачи быстрогодействия для объекта (8)-(11), причем эта задача должна быть решена и реализована до начала азотирования, т.к. отклонение температуры азотирования от регламентированной отрицательно влияет на характер диффузии азота, величину и плотность распределения нитридов, хрупкость и твердость поверхностного слоя и прочность и износостойкость азотированных деталей при переменных нагрузках.

Предварительный анализ показывает, что допустимое приближенное отклонение  $\varepsilon_T^{\text{зад}}$  температуры от постоянной требуемой  $T^* = \text{const}$  находится в области

$$\varepsilon_{\min}^{(2)} < \varepsilon_T^{\text{зад}} < \varepsilon_{\min T}^{(1)}. \quad (36)$$

Поэтому в соответствии с процедурой АМО для решения задачи оптимального по быстродействию нагрева заготовки ограничиваемся двухинтервальным управлением  $i=2$ , а параметры  $\Delta_{T1}$  и  $\Delta_{T2}$  при заданном допустимом отклонении определяются из системы уравнений АМО:

$$\theta(0, \Delta_{T1}, \Delta_{T2}) = -\varepsilon_T^{зад}; \quad \theta(l_{\varepsilon_2}^0, \Delta_{T1}, \Delta_{T2}) = \varepsilon_T^{зад};$$

$$\frac{\partial \theta(l_{\varepsilon_2}, \Delta_{T1}, \Delta_{T2})}{\partial l} = 0.$$

Проведенная декомпозиция модели тепломассопереноса на диффузионную краевую задачу массопереноса и краевую задачу теплопроводности существенно упрощает решение задачи оптимального управления процессом азотирования по критерию максимальной производительности установки в условиях заданного качества азотирования при выполнении технологических ограничений. Предлагаемый алгоритм оптимизации значительно сокращает время процесса азотирования в сравнении с традиционным способом обработки.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бенгина Т.А. Оптимизация технологического процесса газового азотирования: Автореф. дис.... канд. техн. наук: 05.13.06. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2008. – 25 с.
2. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965. – 474 с.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
4. Коган Я.Д., Булгач А.А. Моделирование на ЭВМ кинетики диффузионного насыщения при газовом азотировании // МиТОМ. – 1984. – № 1. – С. 10-19.
5. Лахтин Ю.М. Регулирование фазового состава и содержания азота в нитридном слое при азотировании стали 38Х2МЮА // МиТОМ. – 1996. – № 1. – С. 5-11.
6. Лахтин Ю.М., Коган Я.Д., Булгач А.А. Азотирование в машиностроении // Сб. научных трудов МАДИ. – М., 1986. – С. 42-49.
7. Ливищ М.Ю. Оптимизация тепломассообмена при химико-термической обработке изделий // Труды III Минского международного форума по тепломассообмену. Т. 3. – Минск, 1996. – С. 65-70.
8. Ливищ М.Ю. Теория и алгоритмы оптимального управления термодиффузионными процессами технологической теплофизики по системным критериям качества. Дис. ... д-ра техн. наук. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2001. – 425 с.
9. Рапопорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2003. – 299 с.
10. Рапопорт Э.Я. Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. – М.: Наука, 2000. – 366 с.
11. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1977. – 480 с.
12. Сыропятов В.Я., Зинченко В.М., Барелко В.В., Быков Л.А. Новые возможности газового азотирования // Наука – производству. – 1998. – № 1. – С. 24-36.
13. Тихонов А.Н. О методах регуляризации задач оптимального управления / ДАН СССР, 1965. – Вып. 162, № 4. – С. 763-766.

Статья поступила в редакцию 25 января 2014 г.

## OPTIMUM CONTROL OF HEATMASS TRANSFER PROCESS IN THE CONDITIONS OF DECOMPOSITION OF BASIC MODEL

***T.A. Bengina***

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia

*The aim of research is design of technological modes of gas nitriding which provides the improvement of properties of the processed product surface and growth of productivity of the equipment. New approach to a problem of optimum control by heatmass transfer process (gas nitriding) by criterion of the maximum productivity of installation in the conditions of the set quality of nitriding is offered when performing technological restrictions. Unlike known statements of similar tasks decomposition of mathematical model of process on two regional problems of optimum control by mass transfer and heat conductivity process with the mobile right end of a trajectory in rough infinite-dimensional area of space of states is carried out. As a method of the solution of the parametrized optimum task the alternansny method of optimization is accepted.*

**Keywords:** *gas nitriding, heatmass transfer, optimum control, decomposition of model, minimax assessment of a deviation, alternansny method of optimization.*