УДК 621.315.01

ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПЛАСТИНЫ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА

В.И. Котенев, А.В. Котенев, А.Н. Татарников

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
E-mail: akotenev@samgtu.ru

Рассматривается одноэлементная аппроксимация уравнения нестационарной теплопроводности пластины при теплообмене с граничными условиями третьего рода с применением метода интегральных элементов, в котором использована квадратичная координатная функция. Динамика теплообмена пластины представлена типовым звеном второго порядка, для которого построены разностные частотные характеристики в заданном диапазоне относительных частот. Этот диапазон частот позволяет определить область, в которой допустима одноэлементная аппроксимация. Погрешность аппроксимации оценивается исходя из условия обеспечения заданной величины частоты среза системы автоматического управления температурой пластины. Рассмотрен пример определения частоты среза системы при Bi=1 и заданных значениях размеров и коэффициента температуропроводности материала пластины. Показано, что в диапазоне относительных частот от 0 до 4 погрешность аппроксимации амплитудно-частотной характеристики не превышает 1 дБ, а фазо-частотной характеристики – 5°.

Ключевые слова: *уравнение нестационарной теплопроводности пластины, аппроксимация, система управления, одноэлементная аппроксимация, метод интегральных элементов, оценка погрешности аппроксимации.*

Известно [1], что точное решение задачи нестационарной теплопроводности, даже для тела простой геометрической формы, выражается в виде бесконечного функционального ряда. Причем, если точное решение получено, то в практических расчетах используются только несколько членов этого ряда. Получение точного решения для тела сложной геометрической формы практически невозможно.

Поэтому разработка приближенных методов решений [2-5] имеет большое прикладное значение. Особенно эта проблема актуальна в решениях задач синтеза систем управления тепловыми процессами, так как модели их объектов управления содержат не только обыкновенные дифференциальные уравнения, но и уравнения в частных производных.

Существующие методы интегральных преобразований, ортогональной проекции [4] и ряд других методов, хотя и позволяют получать сравнительно простые приближенные модели, но они существенно отличаются от тех моделей,

Виктор Иванович Котенев (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Электроснабжение промышленных предприятий».

Александр Викторович Котенев (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Электроснабжение промышленных предприятий».

Алексей Николаевич Татарников, аспирант.

которые используются в теории систем автоматического управления, и по этой причине их применение крайне ограничено.

Из сравнения модели метода интегральных элементов [6] с точной моделью [7] по переходным характеристикам при скачкообразном изменении граничных условий следует, что они незначительно отличаются лишь на начальных участках, что практически не отражается на конечной температуре нагреваемого тела. Однако, это может негативно отразится на качестве процесса системы управления, и тем сильнее, чем выше ее быстродействие.

Поэтому погрешность аппроксимации недостаточно оценивать только по временным характеристикам. Удобно ее оценивать еще и по частотным характеристикам объекта управления, исходя из заданного быстродействия системы управления.

Данный подход рассматривается на примере уравнения нестационарной теплопроводности пластины

$$\frac{\partial\theta(r,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\theta(r,\tau)}{\partial r^2}, \tag{1}$$

$$\tau>0,\ 0\le r\le 1$$

с краевыми условиями

$$\theta(r,0)=0;$$

$$-\frac{\partial\theta(1,\tau)}{\partial r}+\mathrm{Bi}\left[\theta_c(1,\tau)-\theta(1,\tau)\right]=0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\theta(0,\tau)}{\partial r}=0,$$

где $\mathrm{Bi}=\alpha/\lambda R_{\text{п}}$ – число Bi;

$\tau=at/R_{\text{п}}^2$ – относительное время;

$R=R/R_{\text{п}}$ – относительная толщина пластины;

α – коэффициент теплоотдаМи;

λ, a – коэффициенты теплопроводности и температуропроводности;

$R_{\text{п}}$ – толщина половины пластины;

θ, θ_c - температуры шара и окружающей среды.

В [6] приведены системы обыкновенных дифференциальных и операторных уравнений, которые получены с помощью метода, изложенного в [5]. При однолинейной аппроксимации уравнения пластины система операторных уравнений представлена двумя уравнениями. Одно из них составлено для центра пластины

$$\vartheta_1(p)=\frac{\vartheta_{\text{c}}(p)-T_{21}p\vartheta_2(p)}{T_{11}p+1},$$

а второе – для поверхности

$$\vartheta_2(p)=\frac{\vartheta_{\text{c}}(p)-T_{12}p\vartheta_1(p)}{T_{11}p+1},$$

где

$$T_{11} = b_{11}^{(2)} + \frac{b_{11}^{(1)}}{\mathrm{Bi}}; \; T_{21} = b_{21}^{(2)} + \frac{b_{21}^{(1)}}{\mathrm{Bi}}; \; T_{22} = \frac{b_{21}^{(1)}}{\mathrm{Bi}}; \; T_{12} = \frac{b_{11}^{(1)}}{\mathrm{Bi}};$$

$$b_{11}^{(1)} = \frac{m}{m+1}; \; b_{21}^{(1)} = \frac{1}{m+1}; \; b_{11}^{(2)} = \frac{m(m+3)}{2(m+1)(m+2)}; \; b_{11}^{(2)} = \frac{1}{(m+1)(m+2)};$$

$$\vartheta_{\text{с}}(p) = \frac{\theta_{\text{с}}(p)}{\theta_{\text{с}}}; \; \vartheta_i(p) = \frac{\theta_i(p)}{\theta_{\text{с}}}; \quad i = 1,2.$$

Из этих уравнений можно выразить температуру поверхности пластины относительно температуры греющей среды:

$$\vartheta_2(p) = W_2(p)\vartheta_{\text{с}}(p); \tag{3}$$

$$W_2 = \frac{(T_{11} - T_{12})p + 1}{(T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21})p^2 + (T_{11} + T_{22})p + 1}, \tag{4}$$

где

$T_{11} = 13/12$; $T_{21} = 2/3$; $T_{22} = 1/3$; $T_{21} = 5/12$;

$\mathrm{Bi} = 1$; $m = 2$.

Из точного решения уравнения (1) [7] следует, что

$$\vartheta_{2\text{т}}(p) = W_2(p)\vartheta_{\text{с}}(p). \tag{5}$$

Передаточная функция, соответствующая точному решению является трансцендентной функцией комплексного переменного p

$$W_{2\text{т}} = \frac{\mathrm{ch}\sqrt{p}}{\mathrm{ch}\sqrt{p} + \mathrm{Bi}^{-1}\sqrt{p}\,\mathrm{sh}\sqrt{p}}.$$

Частотная передаточная функция

$$W_{2\text{т}}(p) = \frac{\mathrm{ch}\sqrt{j\omega}}{\mathrm{ch}\sqrt{j\omega} + \mathrm{Bi}^{-1}\sqrt{j\omega}\,\mathrm{sh}\sqrt{j\omega}}. \tag{6}$$

Подставив в (6)

$$\sqrt{j} = j^{\frac{1}{2}} = e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} + j\sqrt{\frac{1}{2}}$$

после несложных преобразований получим:

$$L_{2\text{т}}(\Omega) = 20\lg\left(\frac{\sqrt{a_7^2 + a_8^2}}{a_5^2 + a_6^2}\right); \tag{7}$$

$$\varphi_{2\text{т}}(\Omega) = \mathrm{arctg}\left(\frac{a_8}{a_7}\right) \tag{8}$$

где

$a_7 = a_1a_2a_3 + a_3a_4a_5$; $a_8 = a_1a_2a_5 - a_3a_4a_6$; $a_5 = a_3a_4 + \mathrm{Bi}^{-1}x(a_2a_3 - a_1a_4)$;

$a_6 = a_1a_2 + x\mathrm{Bi}^{-1}(a_1a_4 + a_2a_3)$; $a_1 = \sin x$; $a_2 = \mathrm{sh}\,x$; $a_3 = \cos x$; $a_4 = \mathrm{ch}\,x$;

$x = \sqrt{\dfrac{\Omega}{2}}$; $\Omega = \dfrac{R_{п}^2}{a}\omega$; ω – круговая частота.

Переходные характеристики, точные $\vartheta_{2т}(\tau)$ (оригинал выражения (5)) и приближенные $\vartheta_2(\tau)$ (оригинал выражения (3)), при $\mathrm{Bi} = 1$, $m = 1$, приведены на рис.1.

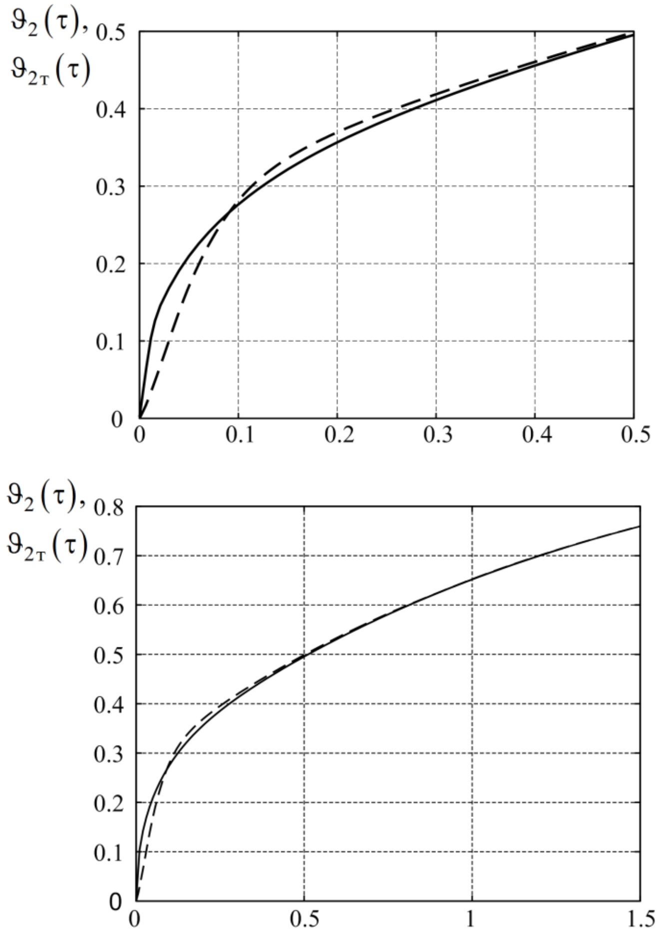

Рис. 1. Точные $\vartheta_{2т}(\tau)$ (сплошные линии)
и приближенные ϑ_2 (пунктирные линии) характеристики

Разностные логарифмические амплитудная $\Delta L(\Omega) = L_2(\Omega) - L_{2т}(\Omega)$ и фазовая $\Delta\varphi(\Omega) = \varphi_{2т}(\Omega) - \varphi_2(\Omega)$ частотные характеристики представлены на рис. 2. Характеристики $L_1(\Omega)$, $\varphi_1(\Omega)$ построены по выражению (4), а $L_{2т}(\Omega)$, $\varphi_{2т}(\Omega)$ - по соотношениям (7), (8).

Из анализа частотных характеристик следует, что в диапазоне частот $0 < \Omega \le \Omega_1$ $\left(\Omega_1 = 10^{0,6} \approx 4\right)$ погрешность составляет: фазовой частотной характеристики $\varphi \le 5°$, амплитудной частотной характеристики – $\Delta L \le 1\,дБ$. Погрешность $\Delta\varphi(\Omega)$ при частотах $\Omega \geq \Omega_1$ растет почти по линейной зависимости, достигая $\Delta\varphi\left(10^{1,7}\right) = 30°$, что необходимо учитывать при синтезе регуляторов.

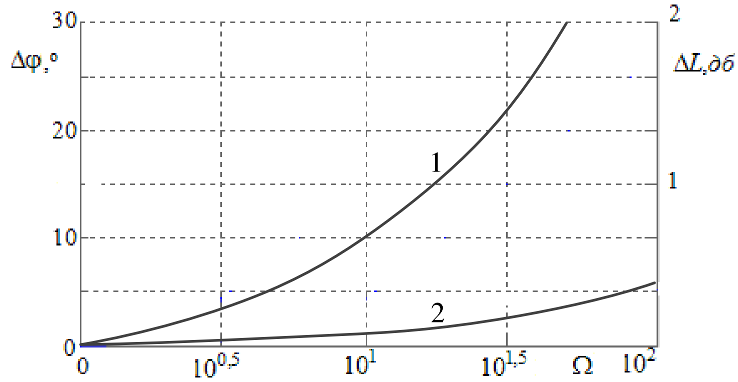

Рис. 2. Погрешность частотных характеристик:
фазовой $\Delta\varphi(\Omega)$ – 1; логарифмической амплитудной $\Delta L(\Omega)$ – 2

Например, при управлении температурой стальной пластины, толщина которой составляет

$$R_{\text{п}} = 0,03 \text{ м},$$

а коэффициент температуропроводности

$$a = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с},$$

частота среза системы автоматического управления не должна превышать

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{a\,\Omega_1}{R_{\text{п}}^2} = \frac{1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 4}{0,03^2} = 0,0561 \text{ 1/с}.$$

Для повышения быстродействия системы управления может быть использована более сложная математическая модель [6], которая получена при разбиении пластины на большое число частей.

Выводы. Дана количественная оценка погрешности аппроксимации уравнения нестационарной теплопроводности пластины с граничными условиями третьего рода обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями. Показано, что однолинейная аппроксимация допустима при относительных частотах среза систем автоматического управления, не превышающих значений $\Omega = 4$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1962 – 708 с.
2. *Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В.* Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. - М.: Высшая школа, 2005. – 432с.
3. *Цой П.В.* Методы расчета задач тепломассопереноса. М.: Энергоатомиздат, 1984. – 416с.
4. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. – 392с.
5. *Котенев В.И.* Приближенный метод решения задач нестационарной теплопроводности // Известия Академии наук СССР. Энергетика и транспорт. – 1983. - №3. - С.111-116.

6. *Котенев В.И., Котенев А.В.* Аппроксимация уравнений теплопроводности конечным числом типовых динамических звеньев // Вестник СамГТУ Техн. науки. - 2013. - Вып.№2 (38). - С. 158 - 163.
7. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.

Статья поступила 27 января 2014 г.

ACCURACY APPROXIMATION OF UNSTEADY HEAT CONDUCTION PLATE WITH BOUNDARY CONDITIONS OF THE THIRD KIND

V.I. Kotenev, A.V. Kotenev, A.N. Tatarnikov

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia

In the paper one-element approximation of the equation of transient heat conduction of plate at heat exchange with boundary conditions of the third kind with application of the method of integral elements in which square coordinate function is used is considered. Dynamics of heat exchange of plate is presented by a standard second order dynamic unit for which difference frequency characteristics in the given range of the relative frequencies are constructed. This frequency range allows determining area in which one-element approximation is admissible. The error of approximation is estimated proceeding from a condition of ensuring the given value of the cutoff frequency of automatic control system of the plate temperature. An example of the system cutoff frequency determination is presented at Bi=1 and the preset values of the plate size and the thermal diffusivity of the material of the plate. It is shown that in the range of relative frequencies from 0 to 4 the error of approximation of the amplitude-frequency characteristic does not exceed 1 dB, and the phase-frequency characteristic – 5 °.

***Keywords**: equation of a transient heat conduction of a plate, approximation, control system, one-element approximation, method of integral elements, approximation error estimation.*

Viktor I. Kotenev (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.
Alexander V. Kotenev (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.
Aleksey N. Tatarnikov, Postgraduate Student.