

Краткие сообщения

УДК 681.518.3

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СОВМЕСТНОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИСКРЕТНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

И.И. Волков, С.В. Фёдоров

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: shade30@gmail.com

Рассматривается подход к определению совместной плотности распределения дискретного стационарного случайного процесса, позволяющий расширить круг моделей корреляционных функций, параметры которых могут быть правдоподобно оценены, и делающий их оценивание достаточно простым. Это достигается путем специального линейного преобразования случайного процесса в процесс с простым видом корреляционной функции. Предлагается конкретный вид преобразования для трехмерной корреляционной функции. Даются практические рекомендации по реализации предлагаемого подхода для ряда важных случаев: корреляционный анализ, построение моделей взаимосвязи. Приводится ряд алгоритмов и результаты их экспериментального исследования.

Ключевые слова: совместная плотность распределения, правдоподобное оценивание, корреляционная функция.

Известно, что одними из лучших по свойствам оценок являются правдоподобные оценки. Они являются состоятельными, асимптотически нормальными и асимптотически эффективными [1]. Но часто решение задачи их оценивания бывает затруднено в силу того, что для их получения необходима дополнительная информация о законах распределения анализируемых данных и, самое главное, независимости отсчетов. Здесь рассматривается один из подходов, который позволяет упростить решение задачи получения оценок. Это достигается путем специального преобразования выборки, что позволяет построить функцию правдоподобия [2].

Пусть имеем дискретный стационарный центрированный случайный процесс с дисперсией D и корреляционной функцией:

$$M[\varepsilon_k \varepsilon_v] = \begin{cases} 0; & k \geq v + 2, k \leq v - 2; \\ D\rho; & k = v + 1, k = v - 1. \end{cases} \quad (1)$$

Игорь Иванович Волков (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Информационные технологии».

Сергей Витальевич Фёдоров, преподаватель кафедры «Информационные технологии».

Известно [3], что совместная плотность распределения любого централизованного процесса с нормальным законом распределения имеет вид

$$f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{\Delta_N})^N} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_{ji} \varepsilon_j \varepsilon_i}, \quad (2)$$

где σ – среднее квадратическое отклонение;

Δ_N – определитель нормированной корреляционной матрицы;

α_{ji} – элементы матрицы, обратной нормированной корреляционной.

Наша задача состоит в определении для рассматриваемого случая величин α_{ji} . Эти величины будем находить из системы уравнений

$$\sum_{i=1}^N \alpha_{ji} \rho_{ki} = \delta_{ij}, \quad k = \overrightarrow{1, N}, \quad j = \overrightarrow{1, N}. \quad (3)$$

Здесь ρ_{ki} – элемент нормированной корреляционной матрицы,

δ_{ij} – символ Кронекера.

С учетом выражения (1) для вычисления определителя нормированной корреляционной матрицы получены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 1, \\ \Delta_2 &= 1 - \rho^2, \\ \Delta_k &= \Delta_{k-1} - \rho^2 \Delta_{k-2}, \quad k = 3, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь Δ_k – определитель нормированной корреляционной матрицы размерности $k \times k$.

На основании этого из системы уравнений (3) находим, что

$$\alpha_{ji} = \sum_{k=i}^N \frac{(-1)^{i+j} \rho^{2k-i-j} \Delta_{i-1} \Delta_{j-1}}{\Delta_k \Delta_{k-1}}, \quad j \leq k. \quad (5)$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}.$$

Подставив α_{ji} из соотношения (5) в выражение (2), получим:

$$f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{\Delta_N})^N} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\Delta_k \Delta_{k-1}} \left(\sum_{i=1}^k (-1)^i \rho^{k-i} \Delta_{i-1} \varepsilon_i \right)^2}. \quad (6)$$

Для примера приводим ряд практически важных случаев:

1) известный случай, когда процессы некоррелированы, $\rho = 0$:

$$\Delta_k = 1, \quad k = \overrightarrow{1, N}, \quad \alpha_{ij} = \delta_{ij},$$

$$f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^N} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N \varepsilon_k^2};$$

2) нормированная корреляционная функция $\rho = \frac{1}{2}$:

$$\Delta_k = \frac{k+1}{2k}; \quad \alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{2(-1)^{i+j}(N+1-i)j}{N+1}; & i = \overrightarrow{1, N}, j \leq i; \\ \frac{2(-1)^{i+j}(N+1-j)i}{N+1}; & i = \overrightarrow{1, N}, j > i, \end{cases}$$

$$f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{\frac{N+1}{2N}}\right)^N} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N \frac{2}{k(k+1)} \left(\sum_{i=1}^k (-1)^i i \varepsilon_i\right)^2};$$

3) нормированная корреляционная функция $\rho = -\frac{1}{2}$:

$$\Delta_k = \frac{k+1}{2k},$$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{2(N+1-i)j}{N+1}; & i = \overrightarrow{1, N}, j \leq i; \\ \frac{2(N+1-j)i}{N+1}; & i = \overrightarrow{1, N}, j > i, \end{cases}$$

$$f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{\frac{N+1}{2N}}\right)^N} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N \frac{2}{k(k+1)} \left(\sum_{i=1}^k i \varepsilon_i\right)^2}.$$

Рассмотрим применение полученных результатов для параметрического оценивания корреляционной функции стационарного случайного процесса.

Пусть имеется центрированный стационарный случайный процесс x_m с корреляционной функцией

$$R_k = M[x_m x_{m+k}] = D_x \lambda^k \left(\cos k\varphi + \frac{c(1-\lambda^2)}{2\lambda \sin \varphi} \sin k\varphi \right). \quad (7)$$

Здесь D_x – дисперсия процесса;

λ, φ, c – параметры корреляционной функции, $-1 \leq c \leq 1$.

Ставится задача правдоподобного оценивания этих параметров. Для этого возьмем выборку значений этого процесса:

$$x_m, \quad m = \overline{1, N+2}.$$

Из этой выборки сформируем другую [2]:

$$\varepsilon_m = x_{m+2} - 2\lambda \cos \varphi x_{m+1} + \lambda^2 x_m, \quad m = \overline{1, N}. \quad (8)$$

Процесс ε_m удовлетворяет условию (1), где

$$D = D_x(1 - \lambda^2)(1 - 2c\lambda \cos \varphi + \lambda^2), \quad (9)$$

$$\rho = \frac{c(1 + \lambda^2) - 2\lambda \cos \varphi}{2(1 - 2c\lambda \cos \varphi + \lambda^2)}, \quad (10)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \rho \leq \frac{1}{2}.$$

Подставив ε_m из соотношения (8) в выражение (2), получим функцию правдоподобия, рассматриваемую как функцию четырех параметров: $D, \rho, \lambda, \varphi$. Значения этих параметров находятся из условия максимума функции правдоподобия.

По найденному значению ρ находится

$$c = \frac{2\rho(1 + \lambda^2) + 2\lambda \cos \varphi}{1 + \lambda^2 + 4\lambda \rho \cos \varphi}. \quad (11)$$

При практическом применении удобно для простоты ввести обозначения:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda \cos \varphi, \\ \lambda_2 = \lambda^2. \end{cases} \quad (12)$$

В этом случае

$$\begin{cases} \varepsilon_m = x_{m+2} - \lambda_1 x_{m+1} + \lambda_2 x_m; \\ D = (1 - \lambda_2)(1 - c\lambda_1 + \lambda_2); \\ \rho = \frac{c(1 + \lambda_2) - \lambda_1}{2(1 - c\lambda_1 + \lambda_2)}; \\ c = \frac{2\rho(1 + \lambda_2) + \lambda_1}{1 + \lambda_2 + 2\rho\lambda_1}. \end{cases} \quad (13)$$

Предложенный метод, во-первых, расширяет круг моделей корреляционных функций, параметры которых могут быть правдоподобно оценены, и, во-вторых, делает их оценивание достаточно простым. Такой подход может быть применен не только для корреляционного анализа, но и для построения различных моделей взаимосвязи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Крамер Г. Математические методы статистики. – М., 1975. – 648 с.
2. Батищев В.И., Волков И.И., Федоров С.В. О правдоподобном оценивании параметров корреляционных функций // Информационные, измерительные и управляющие системы (ИИУС-

- 2012): Материалы III Международной научно-технической конференции. Самар. гос. техн. ун-т. – Самара, 2012. – С. 303-307.
3. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Сов. радио, 1966. – 680 с.

Статья поступила в редакцию 10 февраля 2014 г.

ON THE DETERMINATION OF A JOINT DENSITY FUNCTION FOR ONE CLASS OF DISCRETE STOCHASTIC PROCESSES

I.I. Volkov, S.V. Fedorov

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia

We consider an approach to the determination of the joint density. It allows to extend range of the correlation function models, the parameters of which can be estimated with maximum likelihood estimation, and make their estimation simple enough. This is achieved by a special linear transformation of the stochastic process into the process with a simple form of the correlation function. Concrete conversion type for correlation function with three dimensions is considered. Practical recommendations for the implementation of proposed approach are given for a number of important cases: correlational analysis, modeling of relationship. Finally, a number of algorithms and the results of experimental research are considered.

Keywords: *joint density, maximum likelihood estimation, correlation function.*

*Igor I. Volkov (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.
Sergey V. Fedorov, Teacher.*