УДК 621.391

СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ АДАПТИВНЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

В.И. Батищев, И.И. Волков, А.Г. Золин

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: zolin.a.g@gmail.com

Рассмотрен метод построения обратных нелинейных нестационарных цифровых фильтров для решения обратных задач восстановления сигналов. Восстановление представленным методом возможно в случае применения к исходному сигналу фильтра с известной конечной импульсной характеристикой. Поиск импульсной характеристики обратного фильтра основывается на аппроксимационном подходе. В качестве критериев адекватности полученных решений рассматриваются два: критерий полного совпадения исходного и восстановленного сигналов и критерий минимума взвешенной квадратической погрешности. Апробация алгоритмов выполнена путем восстановления сигналов в виде различных аналитических функций.

Ключевые слова: *критерий минимума взвешенной квадратической погрешности, КИХ-фильтр, весовая функция, обратный фильтр, восстановление сигнала.*

В настоящее время при решении задач обработки и интерпретации экспериментальных данных часто возникает необходимость рассмотрения обратной задачи, заключающейся в восстановлении неизвестного входного воздействия по результатам регистрации откликов на выходе средств измерения. В большинстве случаев это задача компенсации искажающего действия аппаратной функции, обеспечивающая улучшение разрешающей способности различного рода измерительных приборов и систем. В случае, когда для обработки доступна только часть искаженного сигнала, без начальных условий, задача становится недоопределенной и, соответственно, некорректной.

На сегодняшний день методология синтеза оптимальных алгоритмов восстановления сигналов разработана достаточно полно. Однако существующие методы либо требуют для своей реализации не всегда доступной априорной информации, либо сталкиваются с вычислительными проблемами, связанными с некорректностью обратных задач и необходимостью использования регуляризующих процедур [1, 2].

В статье предлагаются алгоритмы синтеза нелинейных нестационарных (адаптивных) цифровых фильтров для решения задач восстановления сигналов, основанные на построении модели весовой функции обратного фильтра с использованием двух подходов: критерия полного соответствия и критерия минимума взвешенной среднеквадратической погрешности [3, 4].

Виталий Иванович Батищев (д.т.н., проф.), заведующий кафедрой «Информационные технологии».

Игорь Иванович Волков (к.т.н., доцент), доцент кафедры «Информационные технологии».

Алексей Георгиевич Золин (к.т.н., доцент), доцент кафедры «Информационные технологии».

Пусть наблюдается ряд

$$y(j) = \sum_{i=0}^{N_0-1} h_0(i)x(j-i)\,, \tag{1}$$

представляющий собой ряд *x(j)*, обработанный фильтром с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтром) с известной весовой функцией $h_0(i)$. Требуется восстановить ряд *x(j)* по ряду *y(j)*. Начальные условия неизвестны. Оценку ряда *x* в момент времени *m* будем искать по алгоритму

$$x'(m) = \sum_{v=0}^{p} h(v)\,y(m-v), \tag{2}$$

где *p* – величина участка ряда *y*, по которой определяется оценка *x*.

Подставив в (1) вместо *x(j) x'(j)* из (2), получим

$$y'(j) = \sum_{v=0}^{p} h(v) \sum_{i=0}^{N_0-1} h_0(i)\,y(j-i-v)\,. \tag{3}$$

Значения *y'(j)* при идеальной обратной фильтрации будут совпадать со значениями *y(j)*, а при реальной будут отличаться от них. Весовая функция *h(v)* обратного фильтра должна выбираться такой, чтобы это отличие было наименьшим.

Для простоты перепишем соотношение (3) в следующем виде:

$$y'(m-j) = \sum_{v=0}^{p} h(v) \sum_{i=0}^{N_0-1} h_0(i)\,y(m-i-j+v)\,.$$

Введем обозначение

$$D(k) = \sum_{i=0}^{N_0-1} h_0(i)\,y(m-i-k), \quad k = \overrightarrow{0,2p}. \tag{4}$$

Тогда

$$y'(m-j) = \sum_{v=0}^{p} h(v) D(j+v). \tag{5}$$

Отметим, что значения D(k) будут зависеть от значения текущего момента времени.

Синтезируем алгоритмы вычисления весовой функции h(v) обратного фильтра по различным критериям.

Критерий совпадения

$$y'(j) = y(j), \quad j = \overrightarrow{m, m-p}$$

или

$$y'(m-j) = y(m-j), \quad j = \overrightarrow{0,p}\,. \tag{6}$$

Из (6) с учетом (5) получим систему уравнений для вычисления значений *h(v)*

$$\sum_{v=0}^{p} h(v) D(j+v) = y(m-j), \quad j = \overrightarrow{0,p}\,. \tag{7}$$

Значения *h(v)*, найденные из этой системы уравнений, будут зависеть от значений текущего момента времени *m* и от *y(j)*.

Решение системы уравнений (7) может быть осуществлено по одному из следующих алгоритмов.

Общая часть:

$$D(k) = \sum_{i=0}^{N_0-1} h_0(i)\, y(m-i-k), \quad k = \overrightarrow{0, 2p};$$

$$\begin{cases} E(v, j) = D(v+j) - \sum\limits_{k=0}^{j-1} C(j,k) E(v,k); \\ C(v, j) = \dfrac{E(v, j)}{E(j, j)}; \\ v = \overrightarrow{0, p}; \\ j = \overrightarrow{0, v}. \end{cases}$$

Алгоритм 1:

$$\begin{cases} g(0,0) = 1; \\ g(v,v) = 1; \\ g(v,k) = -\sum\limits_{j=k+1}^{v} g(v,j) C(j,k), v = \overrightarrow{1, p}, k = \overrightarrow{v-1, 0}; \\ H(k,q) = \sum\limits_{v=k}^{p} \dfrac{g(v,k) g(v,q)}{E(v,v)}, k = \overrightarrow{0, p}, q = \overrightarrow{0, k}; \\ h(k) = \sum\limits_{q=0}^{p} H(k,q) y(m-q), k = \overrightarrow{0, p}; \\ H(k,q) = H(q,k). \end{cases} \qquad (8)$$

Алгоритм 2:

$$\begin{cases} E(v) = y(m-v) - \sum\limits_{j=0}^{v-1} C(v, j) E(j), v = \overrightarrow{0, p}; \\ h(k) = \dfrac{E(k) - \sum\limits_{v=k+1}^{p} h(v) E(v,k)}{E(k,k)}, k = \overrightarrow{p, 0}. \end{cases} \qquad (9)$$

Критерий минимума взвешенной квадратичной погрешности

Взвешенная квадратичная погрешность определяется соотношением

$$\varepsilon(m) = \sum_{j=0}^{N-1} w(j)(y'(m-j) - y(m-j))^2, N = p+1. \qquad (10)$$

Для обеспечения минимума этой погрешности должно быть выполнено условие

$$\frac{d\varepsilon(m)}{dh(k)} = 0, k = \overrightarrow{0, p}.$$

Это условие с учетом (10) сводится к системе уравнений

$$\sum_{v=0}^{p} h(v) \sum_{j=0}^{N-1} w(j) D(j+v) D(j+k) = \sum_{j=0}^{N-1} w(j) D(j+k) y(m-j), \; k = \overrightarrow{0, p}.$$

Для простоты введем обозначения:

$$\begin{cases} \Psi(v,k) = \sum_{j=0}^{N-1} w(j) D(j+v) D(j+k); \\ \psi(k) = \sum_{j=0}^{N-1} w(j) D(j+k) y(m-j). \end{cases} \tag{11}$$

Тогда получим такую систему уравнений:

$$\sum_{v=0}^{p} h(v) \Psi(v,k) = \psi(k), \; k = \overrightarrow{0, p}. \tag{12}$$

Для ее решения получаем следующий алгоритм:

$$\begin{cases} E(v,j) = \Psi(v,j) - \sum_{k=0}^{j-1} C(j,k) E(v,k); \\ C(v,j) = \dfrac{E(v,j)}{E(j,j)}; \\ v = \overrightarrow{0, p}; \\ j = \overrightarrow{0, v}; \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} E(v) = \psi(v) - \sum_{j=0}^{v-1} C(v,j) E(j), \; v = \overrightarrow{0, p}; \\ h(k) = \dfrac{E(k) - \sum_{v=k+1}^{p} h(v) E(v,k)}{E(k,k)}, \; k = \overrightarrow{p, 0}. \end{cases}$$

Апробация алгоритмов

Исследуя алгоритмы (8) и (13) на примерах, для простых случаев можно получить аналитические выражения весовой функции обратного фильтра. Рассмотрим в качестве исходного сигнала x различные виды элементарных функций. В качестве прямого фильтра возьмем фильтр с весовой функцией $h_0(k)=1/3$, $k=\{0,1,2\}$.

Показательная функция:

$$x(m) = A\lambda^m.$$

Используя алгоритм (8), для данного случая можно аналитически получить значение весовой функции обратного фильтра

$$\begin{cases} p = 0; \\ h(0) = \dfrac{3\lambda^2}{1+\lambda+\lambda^2}, \end{cases}$$

что дает нам абсолютно точное решение задачи.

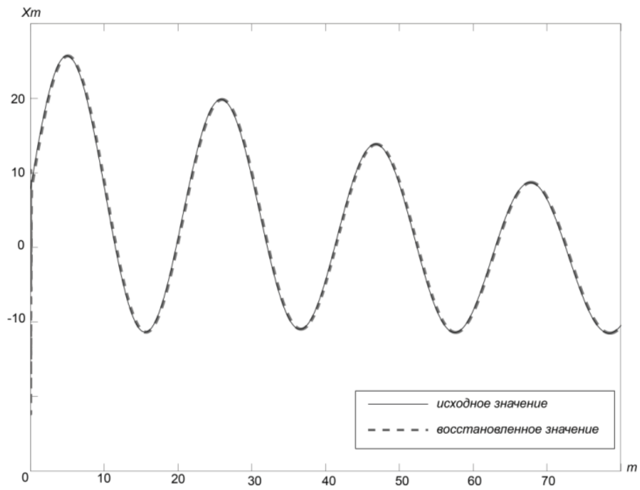
Полиномиальная функция:

$$x(m) = C_0 + C_1 m + C_2 m^2.$$

Для данного случая получим значение весовой функции обратного фильтра:

$$\begin{cases} p = 2; \\ h = \{\dfrac{8}{3}, -\dfrac{7}{3}, \dfrac{2}{3}\}. \end{cases}$$

Применение обратного фильтра с такой весовой функцией даст нам абсолютно точное решение задачи.



Результаты восстановления *x(m)*

Тригонометрическая функция:

$$x(m) = A\cos(m\phi + \psi).$$

Используя алгоритм (8), получим значение весовой функции обратного фильтра:

$$\begin{cases} p = 1; \\ h(0) = \dfrac{3}{2\cos\phi + 1} \cdot 2\cos\phi; \\ h(1) = -\dfrac{3}{2\cos\phi + 1}. \end{cases}$$

И в этом случае мы полиучаем абсолютно точное решение задачи.

Рассмотрим более сложный пример:

$$x(m) = 2 * 0.2^m + 5 * (-0.7)^m + 20\sin(30 * m) \cdot e^{-m}.$$

Весовая функция прямого фильтра $h_0 = \{ 0.1, 0.3, 0.5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0.5, 0.3, 0.1 \}$.

Результат восстановления по алгоритму (8) представлен на рисунке.

Относительная среднеквадратическая погрешность восстановления, вычисляемая по формуле

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum (x(m) - x'(m))^2}{\sum x(m)^2}} \ ,$$

в случае использования алгоритмов (8) и (13) без учета переходного процесса в начале восстановления составила 0,25%.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Батищев В.И., Золин А.Г., Косарев Д.Н., Романеев А.Е.* Аппроксимационный подход к решению обратных задач анализа и интерпретации экспериментальных данных // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2006. – № 40. – С. 57-65.
2. *Леонов А.С.* Решение некорректно поставленных обратных задач. – М.: Либроком, 2010.
3. *Батищев В.И., Мелентьев В.С.* Аппроксимационные методы и системы промышленных измерений, контроля, испытаний, диагностики. – М.: Машиностроение, 2007. – 393 с.
4. *Батищев В.И., Волков И.И., Золин А.Г.* Построение и оптимизация ортогональных базисных систем для аппроксимации спектрально-корреляционного анализа и идентификации линейных динамических объектов // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2007. – № 40. – С. 47-52.

Статья поступила в редакцию 5 июня 2014 г.

FIR DIGITAL FILTERS SYNTHESIS FOR SOLVING SIGNAL RECONSTRUCTION USING TWO CRITERIA

V.I. Batishchev, I.I. Volkov, A.G. Zolin

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

The design method of the inverse nonlinear time-dependent digital filters for the solution of inverse problems of the recovery signals is given. Recovery method shown possible, in case of application to the original signal of the filter with known finite impulse response. Finding the impulse response of the inverse filter is based on the approximation approach. As a criterion for the adequacy of the solutions two criteria are considered: the criterion of complete coincidence of the original with the reconstructed signal and the criterion of the minimum weighted square error. Algorithm tests by restoring the signals in a variety of analytic functions are implemented .

Keywords: *weighted quadratic error, FIR filter, the weight function, the inverse filter, signal recovery.*

Vitaly I. Batishchev (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.
Igor I. Volkov (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.
Aleksey G. Zolin (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.