УДК 681.5.015

АЛЬТЕРНАНСНЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ В КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ*

А.Н. Дилигенская

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Рассматривается коэффициентная обратная задача теплопроводности (ОЗТ) в экстремальной постановке по идентификации переменного коэффициента температуропроводности. На основе ошибки равномерного приближения результирующего температурного распределения к требуемому задача сводится к задаче параметрической оптимизации, соответствующей условно-корректной постановке проблемы. Идентифицируемая величина рассматривается в качестве искомого оптимального управляющего воздействия. Решение задачи оптимизации основывается на альтернансных свойствах искомых оптимальных решений и позволяет получить оптимальные значения вектора искомых параметров при заданной структуре управляющего воздействия. На тестовом примере продемонстрирована возможность практического использования предложенного метода для решения рассматриваемого типа задач.

Ключевые слова: *коэффициентная обратная задача теплопроводности, условно-корректная постановка задачи, задача параметрической оптимизации, альтернансный метод.*

Решение коэффициентных ОЗТ, позволяющих идентифицировать коэффициенты уравнения теплопроводности, по сегодняшний день остается одной из актуальных задач инженерной теплофизики. Особое практическое значение имеют ОЗТ в нелинейной постановке, когда теплофизические характеристики нагреваемых изделий зависят от температуры.

Наиболее общий универсальный подход к решению нелинейных обратных задач [1-3] состоит в применении методов регуляризации решений [4, 5] на основе численного моделирования [6]. Решение ОЗТ в вариационной постановке с использованием условно-регулярных методов [7-9] в ряде случаев позволяет получить явную аналитическую форму решения или свести задачу к системе алгебраических уравнений.

В настоящей статье для решения коэффициентной ОЗТ в экстремальной постановке [1, 10], предусматривающей минимизацию функционала, являющегося мерой соответствия рассчитанного и экспериментального температурного состояния, предлагается использовать известные специальные альтернансные свойства искомых оптимальных решений [11-13].

Температурное поле $T(x,t)$ описывается в зависимости от пространственной переменной x и времени t одномерным нелинейным уравнением нестационар-

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-08-00446)

Анна Николаевна Дилигенская (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Автоматика и управление в технических системах».

ной теплопроводности с зависящими от температуры теплофизическими характеристиками (удельной теплоемкостью c, плотностью материала γ и теплопроводностью $\lambda(T)$ при стандартном допущении $c\gamma = const$)

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(T)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right], x \in [x_0, x_1]; \; t \in [0, t_к] \qquad (1)$$

и соответствующими краевыми условиями. Коэффициент температуропроводности $a(T) = {\lambda(T)}/{c\gamma}$ в (1) является функцией температуры.

ОЗТ заключается в восстановлении зависимости $a(T)$ на основе экспериментальных данных $T^*(t)$, полученных в результате измерения температуры в некоторой фиксированной точке $x^* \in [x_0, x_1]$.

Сформулируем экстремальную постановку рассматриваемой нелинейной коэффициентной ОЗТ. По заданному температурному распределению $T^*(t)$ требуется определить зависимость $a(T)$, минимизирующую невязку между $T^*(t)$ и точным аналитическим или приближенным численным решением $T(x^*, t)$ краевой задачи (1), соответствующим искомой функции $a(T)$.

Для оценки этой невязки используем ошибку равномерного приближения $\varepsilon = \max\limits_t \left|T(x^*, t) - T^*(t)\right|$ результирующего температурного поля к требуемому [11-13] на заданном временном интервале $[0, t_к] \ni t$.

Будем считать, что искомая зависимость $a(T)$ заведомо определена в заданном классе функций переменной T с точностью до выбора некоторого вектора $\omega = (\omega_i), i = \overline{1, n}$ постоянных параметров, например в виде, диктуемом известными аналитическими решениями нелинейной задачи теплопроводности, и, следовательно, задана известной функцией $a(\omega)$ переменной ω.

В этом случае решение ОЗТ может быть сведено к задаче оптимального управления, в которой вектор параметров ω принимается за искомое управляющее воздействие.

Задача оптимального управления теперь может быть сформулирована следующим образом. Для объекта (1) с соответствующими краевыми условиями необходимо найти вектор параметров $\omega = (\omega_i), \omega_i = const, i = \overline{1, n}$ зависимости $a(\omega)$, обеспечивающих на заданном интервале $[0, t_к]$ выполнение минимаксного соотношения

$$I(\omega) = \max_{t \in [0, t_к]} \left|T(x^*, t, \omega) - T^*(t)\right| \to \min_{\omega}. \qquad (2)$$

Решение полученной задачи математического программирования (2) может быть осуществлено альтернансным методом, основанным на использовании специальных альтернансных свойств разности $T(x^*, t, \omega) - T^*(t)$. В соответствии с данными свойствами [11-13] для разности $T(x^*, t, \omega) - T^*(t)$ на интервале $[0, t_к]$ достигаются знакочередующиеся максимальные по абсолютной величине значения в точках $t_j \in [0, t_к], j = \overline{1, n+1}$, число которых на единицу превышает число n искомых параметров. На основании указанных свойств составляется замкнутая система $n+1$ соотношений для предельных разностей температур в этих точках относительно всех неизвестных, дополненная условиями существования экстремума функции $T(x^*, t, \omega) - T^*(t)$ в точках $t_{j_i}, i = \overline{1, m}$, не совпадающих с границами интервала:

$$\begin{aligned} &T(x^*, t_j, \omega) - T^*(t_j) = (-1)^j \cdot \psi \cdot I(\omega),\ j = \overline{1, n+1}; \quad \psi = \pm 1; \\ &\frac{\partial}{\partial t}\left[T(x^*, t_{j_i}, \omega) - T^*(t_i)\right] = 0,\ \{t_{j_i}\} \in \{t_j\}, t_{j_i}, i = \overline{1, m},\ m \le n+1. \end{aligned} \tag{3}$$

При известной форме кривой невязки $T(x^*, t, \omega) - T^*(t)$ на интервале наблюдения $[0, t_к]$ система соотношений (3) трансформируется к системе уравнений, решение которой позволяет найти оптимальные значения ω^* параметров зависимости $a(\omega)$, минимизирующие функционал (2).

Для подтверждения работоспособности предложенного метода рассматривалась нелинейная задача теплопроводности (1) в полуограниченной области изменения пространственной переменой $0 \le x < \infty$ и во времени $0 < t \le t_к$, дополненная соответствующими краевыми условиями вида

$$T(x,0),\ T(x,0) = 0,\ T(0,t) = T_0,\ \lim \left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x \to \infty} = 0. \tag{4}$$

Аналитическое решение нелинейной задачи (1), (4) для коэффициента температуропроводности вида

$$a(T) = \frac{\omega_1}{1 - \omega_2 T} \qquad \omega_1, \omega_2 = const \tag{5}$$

и вида

$$a_0(T) = \frac{\sigma_1}{(1 - \sigma_2 T)^2} \qquad \sigma_1, \sigma_2 = const \tag{6}$$

получены в [14] и приведены в [15].

При решении ОЗТ температура поверхности нагреваемого тела T_0 полагается известной, а определению подлежит переменный коэффициент $a(T)$, структура которого имеет вид (5). Экспериментальное температурное распределение $T^*(t)$ было получено как решение прямой задачи (1), (4) при зависимости коэффициента температуропроводности $a_0(T)$ в виде (6).

Задача восстановления коэффициента $a(T)$ сводится к задаче параметрической оптимизации вида (2) относительно двух искомых параметров ω_1, ω_2, для определения значений которых составляется при $n = 2$ система вида (3) из трех соотношений для предельных значений $T(x^*, t, \omega) - T^*(t)$ в точках $t_j, j = \overline{1,3}$ относительно неизвестных $\omega_1, \omega_2, I, t_2, t_3$, с дополнительными условиями существования экстремума функции $T(x^*, t, \omega) - T^*(t)$ в точках t_2 и t_3.

Применение предложенного метода для решения рассматриваемой ОЗТ при численных значениях $\sigma_1 = 0.4 \cdot 10^{-6}$; $\sigma_2 = 0.8 \cdot 10^{-3}$; $T_0 = 400^0 C$; $x^* = 0.8$ позволило получить значения искомых параметров $\omega_1 = 0.414 \cdot 10^{-6}; \omega_2 = 0.133 \cdot 10^{-2}$ при структуре $a(T)$ вида (5).

Приведенные результаты (рис. 1, 2) показывают удовлетворительную точность идентификации нелинейного коэффициента температуропроводности при максимальной погрешности, достигаемой в начальный момент идентификации, не превышающей 4 %.

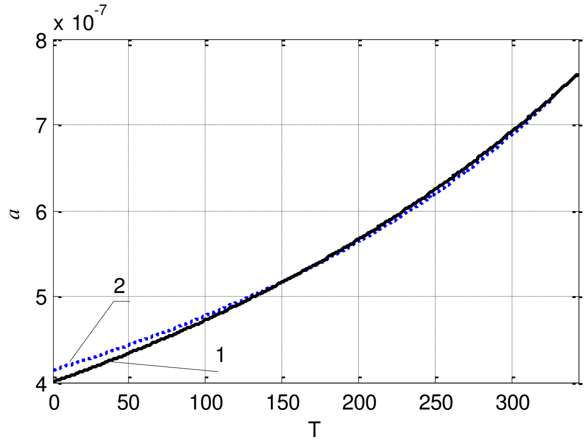
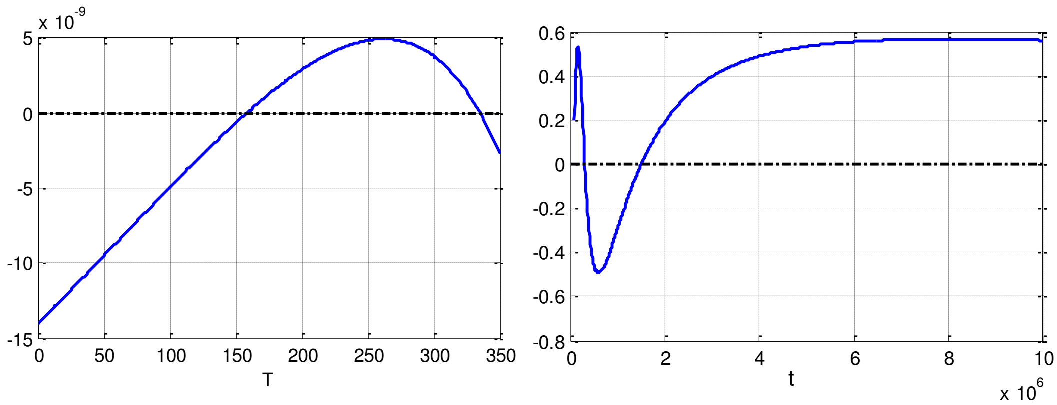


Рис. 1. Восстановление коэффициента температуропроводности:
1 – истинное значение $a_0(T)$; 2 – его аппроксимация $a(T)$



а *б*

Рис. 2. Результаты решения ОЗТ:
а – погрешность $\varepsilon = a_0(T) - a(T)$ аппроксимации коэффициента температуропроводности;
б – ошибка $\varepsilon_T = T(x^*, t, a) - T^*(t)$ приближения температурного поля

Решение коэффициентных ОЗТ, сформулированных в экстремальной условно-корректной постановке, при оценке невязки между результирующим температурным полем и требуемым на основе ошибки равномерного приближения может быть сведено к решению задачи математического программирования. Для ее решения может быть использован специальный альтернансный метод оптимизации, сводящийся к решению систем уравнений, основанных на альтернансных свойствах оптимальных решений для погрешности приближения температур относительно параметров идентифицируемого воздействия.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
2. *Алифанов О.М.* Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1979. – 216 с.
3. *Мацевитый Ю.М.* Обратные задачи теплопроводности. В 2-х т. – Киев: Наукова Думка, 2002. – 408 с.
4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
5. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
6. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: Изд-во ЛКИ, 2009. – 480 с.
7. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
8. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 288 с.
9. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
10. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
11. *Плешивцева Ю.Э., Рапопорт Э.Я.* Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Известия РАН. ТиСУ. – 2009. – № 3. – С. 22-33.
12. *Рапопорт Э.Я., Плешивцева Ю.Э.* Алгоритмически точный метод параметрической оптимизации в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Автометрия. – 2009. – Т. 45. – № 5. – С. 103–112.
13. *Рапопорт Э.Я., Плешивцева Ю.Э.* Специальные методы оптимизации в обратных задачах теплопроводности // Известия РАН. Энергетика. – 2002. – № 5. – С. 144–155.
14. *Fujita H.* Text. Res. Jr., 22. – p. 757, 1952.
15. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

Статья поступила в редакцию 3 октября 2014 г.

ALTERNANCE ORTIMIZATION METHOD IN THE COEFFICIENT INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEM

A.N. Diligenskaya

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

This paper deals with the extremely formulated inverse heat conduction problem (IHCP); the goal is to define the variable coefficient of thermal conductivity. On the basis of error of uniform approximation of resulting temperature distribution to required distribution, the problem is formulated as parametrical optimization problem which corresponds to nominally correct formulation of problem. The value to be defined is considered as sought optimal control action. The solution of optimization problem is based on the alternance properties of sought optimal solutions and allows to obtain optimal values of sought parameters vector with stated structure of control action. Test example shows the possibility of practical use of the proposed method to solve the considered type of problems.

Keywords: *Coefficient inverse heat problem, conditional-correct formulation, the problem of parametrical optimization, alternance method.*

Anna N. Diligenskaya (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.