

УДК 621.315.01

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА НАГРЕВА ОТСЕКА С ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИМ ОБОРУДОВАНИЕМ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ДВИЖЕНИЯ НАПОЛЬНОГО ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА**

***В.И. Котенев, А.В. Котенев***

Самарский государственный технический университет  
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

*Математическая модель построена на основе уравнения нестационарной теплопроводности шара, эквивалентного по тепломассовым характеристикам основным тепловыделяющим элементам электрооборудования, уравнения теплообмена между воздухом внутри отсека, поверхностью шара и внутренней поверхностью корпуса отсека, а также уравнения теплового баланса между внешней поверхностью корпуса отсека и атмосферным воздухом. Уравнение теплопроводности шара аппроксимировано обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка методом интегральных элементов. Для определения предельных значений чисел Био, при которых требуются уточнения метода интегральных элементов, построены графические зависимости относительных значений отклонений приближенных решений от точных для разных чисел Био и показателей степени координатной функции. Разработана структурная схема отсека с электрооборудованием, которая предназначена для построения устройства ограничения температуры в отсеке посредством управления интенсивностью движения напольного транспортного средства.*

***Ключевые слова:** математическая модель, уравнения математической физики, теплообмен, аппроксимация, управление объектами с распределенными параметрами.*

При работе бортового силового электрооборудования электрифицированных транспортных средств в особых условиях, связанных с высокой температурой, агрессивными и взрывоопасными средами, проблема обеспечения надлежащего теплового режима электрооборудования является одной из основных. В указанных случаях, когда по разным причинам обеспечить эффективный отвод тепла в окружающую среду не представляется возможным, необходим иной подход для обеспечения заданного теплового режима работы электрооборудования.

Концептуально вынужденное решение вышеуказанной проблемы, как правило, выражается в задаче ограничения производительности электрооборудования в условиях угрозы его перегрева в пиковых режимах. Такой подход в большинстве случаев является более предпочтительным по сравнению с завышением требований к тепловым характеристикам оборудования.

Для эффективного управления производительностью электрооборудования необходима адекватная и по возможности простая тепловая модель электрообо-

---

*Виктор Иванович Котенев (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Электроснабжение промышленных предприятий».*

*Александр Викторович Котенев (к.т.н.) доцент кафедры «Электроснабжение промышленных предприятий».*

рудования рассматриваемого транспортного средства. Составление математической модели, необходимой для построения рациональной схемы управления производительностью электрооборудования транспортного средства на основе реальной тепловой схемы, состоящей из большого числа элементов сложной геометрии, встречает известные затруднения. В данной работе реальная тепловая схема представляется упрощенной эквивалентной одномерной тепловой схемой с элементами шаровой формы.

Рассматривается бортовое оборудование электропривода электрифицированного напольного транспортного средства, расположенное в отдельном отсеке, основные греющие элементы которого (трансформаторы, полупроводниковые модули, дроссели) представлены (рис. 1) сплошным шаром радиусом  $0 \leq R \leq R_{\text{ш}}$ , а стальной корпус отсека – сферической поверхностью  $R_{\text{к}}$ .

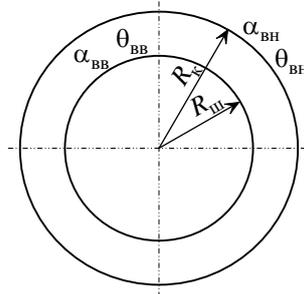


Рис. 1. Расчетная тепловая схема аккумуляторного отсека

Температурное поле шара описывается уравнением теплопроводности [1] с внутренним источником теплоты  $q(\tau)$ :

$$\frac{\partial \theta(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \theta(r, \tau)}{\partial r} \right) + q(\tau), \quad (1)$$

$$\tau \in [0, \infty], \quad r \in [0, r_{\text{ш}}], \quad r = \frac{R}{R_{\text{ш}}}, \quad \tau = \frac{at}{R_{\text{ш}}^2}, \quad q(\tau) = \frac{R_{\text{ш}}^2}{\lambda V_1} N(\tau)$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial r} = 0; \quad (2)$$

$$-\frac{\partial \theta(r_{\text{ш}}, r)}{\partial r} = \text{Bi}(\theta(r_{\text{ш}}, \tau) - \theta_{\text{вв}}(\tau)); \quad (3)$$

$$\theta(r, 0) = 0; \quad \text{Bi} = \frac{\alpha_{\text{вв}} R_{\text{ш}}}{\lambda},$$

где  $\theta(r, \tau)$  – температура;  $t$  – время;  $a$  – коэффициент температуропроводности;  $\alpha_{\text{вв}}$ ,  $\theta_{\text{вв}}$  – коэффициент теплоотдачи и температура воздуха внутри отсека;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала шара;  $N$  – мощность источника теплоты;  $V_1$  – объем шара.

Уравнение теплообмена внутри отсека:

$$c_{\text{в}} m_{\text{в}} \frac{d\theta_{\text{вв}}(t)}{dt} = \alpha_{\text{вв}} F_{\text{ш}} [\theta(r_{\text{ш}}, t) - \theta_{\text{вв}}(t)] + \alpha_{\text{вв}} F_{\text{к}} [\theta_{\text{к}}(t) - \theta_{\text{вв}}(t)], \quad (4)$$

где  $c_{\text{в}}$ ,  $m_{\text{в}}$  – удельная теплоемкость и масса воздуха отсека;  $\alpha_{\text{вв}}$  – коэффициент

теплоотдачи;  $F_{\text{ш}}$ ,  $F_{\text{к}}$  – площади поверхностей шара и корпуса отсека.

Уравнение теплового баланса корпуса отсека:

$$c_{\text{к}} m_{\text{к}} \frac{d\theta_{\text{к}}(t)}{dt} = \alpha_{\text{вн}} F_{\text{к}} [\theta_{\text{вн}}(t) - \theta_{\text{к}}(t)] + \alpha_{\text{вв}} F_{\text{к}} [\theta_{\text{вв}}(t) - \theta_{\text{к}}(t)], \quad (5)$$

где  $c_{\text{к}}$ ,  $m_{\text{к}}$  – удельная теплоемкость и масса материала корпуса;  $\theta_{\text{к}}$  – температура корпуса.

Для аппроксимации уравнения теплопроводности шара воспользуемся методом интегральных элементов [2-4]. С этой целью для шара, представленного одним элементом, выбрана аппроксимирующая функция

$$\bar{\theta}(r, \tau) = (\theta_2(\tau) - \theta_1(\tau)) r^m + \theta_1(\tau) \quad (6)$$

и составлены интегро-дифференциальные уравнения:

$$\int_0^1 \left( r^2 \frac{\partial \theta(r, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \theta(r, \tau)}{\partial r} \right) - r^2 q(\tau) \right) dr = 0; \quad (7)$$

$$\int_0^1 dr_x \int_0^{r_x} \left( r^2 \frac{\partial \theta(r, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \theta(r, \tau)}{\partial r} \right) - r^2 q(\tau) \right) dr = 0. \quad (8)$$

После интегрирования этих уравнений с учетом граничных условий (2), (3) и аппроксимирующей функции (6) получим:

$$b_{11}^{(1)} \frac{d\theta_1(\tau)}{d\tau} + b_{21}^{(1)} \frac{d\theta_2(\tau)}{d\tau} = \text{Bi} \theta_{\text{вв}}(\tau) - \text{Bi} \theta_2(\tau) + \frac{k_{01}}{3} N(\tau); \quad (9)$$

$$b_{11}^{(2)} \frac{d\theta_1(\tau)}{d\tau} + b_{21}^{(2)} \frac{d\theta_2(\tau)}{d\tau} = \theta_2(\tau) - \theta_1(\tau) + \frac{k_{01}}{12} N(\tau), \quad (10)$$

где  $k_{01} = \frac{R_{\text{ш}}^2}{\lambda V_1}$ .

Так как в уравнение (10) граничное условие (3) не вошло, то температуру на внешней поверхности шара выразим через параметры этого граничного условия. С этой целью  $\theta_2(\tau)$  найдем из (9)

$$\theta_2(\tau) = \text{Bi}^{-1} \left( -b_{11}^{(1)} \frac{d\theta_1(\tau)}{d\tau} - b_{21}^{(1)} \frac{d\theta_2(\tau)}{d\tau} + \text{Bi} \theta_{\text{вв}}(\tau) + \frac{k_{01}}{3} N(\tau) \right),$$

подставим в (10) и после преобразования его по Лапласу получим

$$\theta_1(p) = (T'_{11} p + 1)^{-1} (\theta_{\text{вв}}(p) - T'_{21} p \theta_2(p) + k_{N1} N(p)), \quad (11)$$

где

$$T'_{11} = b_{11}^{(2)} + \frac{b_{11}^{(1)}}{\text{Bi}}; \quad T'_{21} = b_{21}^{(2)} + \frac{b_{21}^{(1)}}{\text{Bi}}; \quad k_{N1} = \frac{k_{01}(3\text{Bi} + 4)}{12\text{Bi}}. \quad (12)$$

Второе операторное уравнение получим из (9):

$$\theta_2(p) = (T'_{22} p + 1)^{-1} (\theta_{\text{вв}}(p) - T'_{12}(p) \theta_1(p) + k_{N2} N(p)), \quad (13)$$

где

$$T'_{22} = \frac{b_{21}^{(1)}}{\text{Bi}}; \quad T'_{12} = \frac{b_{11}^{(1)}}{\text{Bi}}; \quad k_{N2} = \frac{k_{01}}{3\text{Bi}}; \quad (14)$$

$$b_{11}^{(1)} = \frac{m}{3(m+3)}; b_{21}^{(1)} = \frac{1}{m+3}; b_{11}^{(2)} = \frac{m(m+5)}{6(m+2)(m+3)}; b_{21}^{(2)} = \frac{1}{(m+2)(m+3)}.$$

Приближенные переходные характеристики

$$\vartheta_i(\tau) = \theta_i(\tau)/\theta_B = L^{-1}\{W_i(p)\theta_B(p)/\theta_B\}, i=1;2,$$

построенные с помощью уточненного метода интегральных элементов (постоянные времена вычисляются по выражениям (12), (14) и уточненного метода интегральных элементов (постоянные времена  $T'_{11} = b_{11}^{(2)}$ ,  $T'_{21} = b_{21}^{(2)}$ ,  $T'_{22} = b_{21}^{(1)}/Bi$ ,  $T'_{21} = b_{11}^{(1)}/Bi$ ), а также точные переходные характеристики [1] для центра и поверхности шара для  $m=2$ ,  $Bi=0,1;1;4;10$  представлены на рис. 2.

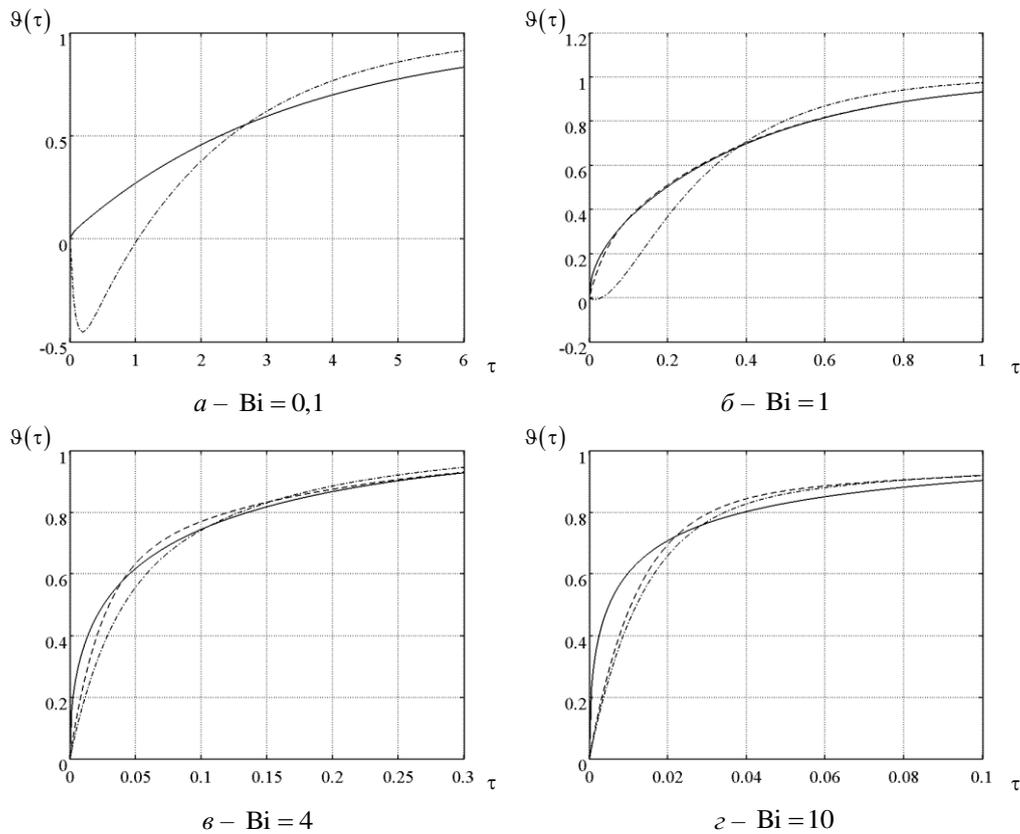


Рис. 2. Переходные характеристики поверхности шара при  $m=2$ : точные (сплошные линии), МИЭ (штрих-пунктирные), уточненный МИЭ (штриховые)

Для установления предельного значения числа Био, при котором требуется уточнение метода интегральных элементов, используется разностная интегральная оценка

$$\sigma_I = 100\% \int_0^{\tau_{\max}} \frac{|\vartheta_{2T}(\tau) - \vartheta_2(\tau, m)|}{\vartheta_{2T}(\tau)} d\tau.$$

Значение  $\tau_{\max}$  выбрано из условия вхождения  $\vartheta_{2T}(\tau)$  в 5%-ю зону установившегося значения. Характеристики  $\sigma_I(m)$  в диапазоне изменения  $m=0,5...3,5$ ;  $Bi=0,01...10$  представлены на рис. 3.

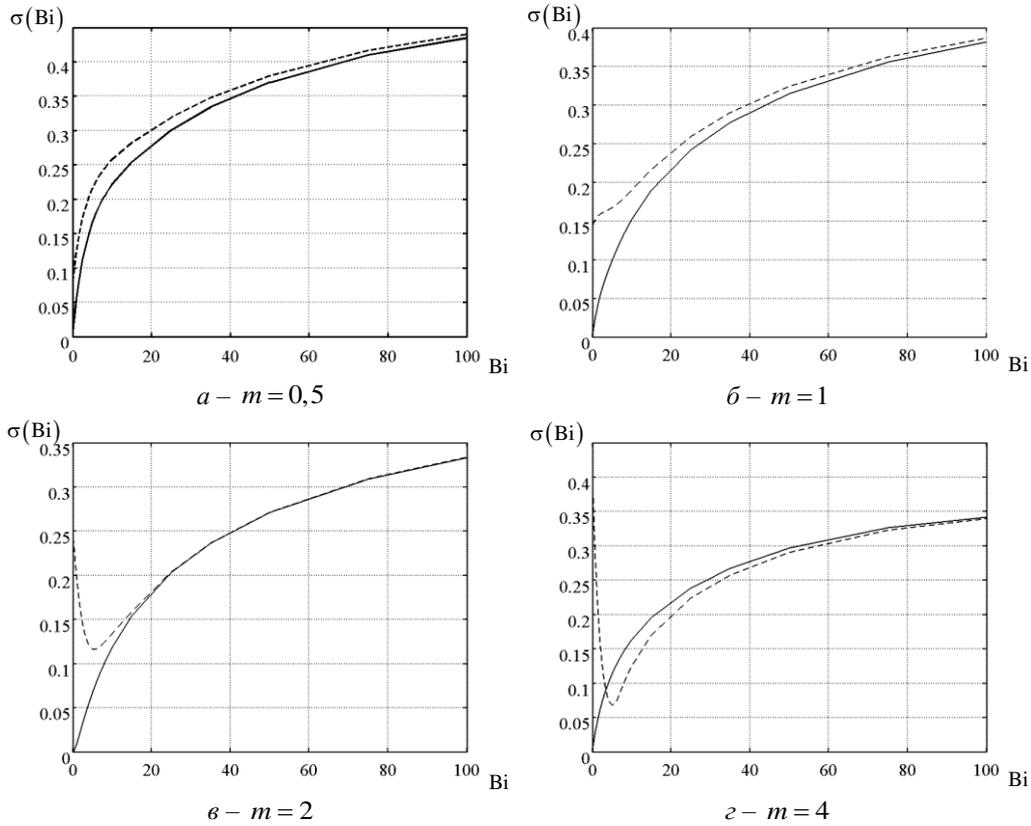


Рис. 3. Относительное значение интегральной ошибки приближения  $\sigma_1 = f(Bi, m)$  поверхности шара, полученные с помощью МИЭ (пунктирная линия) и уточненного МИЭ (сплошная)

Анализ зависимостей (см. рис. 3) показывает, что уточненный метод уменьшает погрешность аппроксимации во всех случаях, а при  $Bi \geq 20$  оба метода дают практически одинаковую погрешность. Это объясняется тем, что число Био входит в знаменатель постоянных времени  $T'_{11}$ ,  $T'_{21}$ .

Запишем уравнение процесса нагрева теплоносителя (4) и корпуса отсека (5) в операторном виде:

$$\theta_{\text{BB}}(s) = (T_3 s + 1)^{-1} (k_3 \theta_2(s) + k_4 \theta_{\text{K}}(s)); \quad (15)$$

$$\theta_{\text{K}}(s) = (T_4 s + 1)^{-1} (k_5 \theta_{\text{BH}}(s) + k_6 \theta_{\text{BB}}(s)), \quad (16)$$

где

$$T_3 = \frac{c_{\text{B}} m_{\text{B}}}{\alpha_{\text{BB}} (F_{\text{ш}} + F_{\text{K}})}; \quad T_4 = \frac{c_{\text{K}} m_{\text{K}}}{(\alpha_{\text{BH}} + \alpha_{\text{BB}}) F_{\text{K}}}; \quad k_3 = \frac{F_{\text{ш}}}{F_{\text{ш}} + F_{\text{K}}}; \quad k_4 = \frac{F_{\text{K}}}{F_{\text{ш}} + F_{\text{K}}};$$

$$k_5 = \frac{\alpha_{\text{BH}}}{\alpha_{\text{BH}} + \alpha_{\text{BB}}}; \quad k_6 = \frac{\alpha_{\text{BB}}}{\alpha_{\text{BH}} + \alpha_{\text{BB}}}; \quad s = \frac{d}{dt}.$$

Операторные уравнения процесса теплообмена шара (11), (13) принимают вид

$$\theta_1(s) = (T_{11} s + 1)^{-1} (\theta_{\text{BB}}(s) - T_{21} s \theta_2(s) + k_{N1} N(s)); \quad (17)$$

$$\theta_2(s) = (T_{22} s + 1) (\theta_{\text{BB}}(s) - T_{12} s \theta_1(s) + k_{N2} N(s)), \quad (18)$$

где

$$T_{11} = \frac{R_{\text{ш}}^2}{a} T'_{11}; \quad T_{12} = \frac{R_{\text{ш}}^2}{a} T'_{12}; \quad T_{21} = \frac{R_{\text{ш}}^2}{a} T'_{21}; \quad T_{22} = \frac{R_{\text{ш}}^2}{a} T'_{22}.$$

Неизвестные значения коэффициентов теплопроводности  $\lambda$  и температуропроводности  $a$  шара определяются по экспериментальной кривой охлаждения трансформаторов. При этом считается, что графики временных зависимостей шара и трансформаторов совпадают при теплообмене. Временная зависимость шара получена как оригинал изображения (18) при  $N(s) = 0$ .

Из временной зависимости температуры при охлаждении трансформатора ТСЗИ-380/4 от начальной температуры  $\theta_{2\text{н}} = 85^\circ\text{C}$  при температуре охлаждающей среды  $\theta_{\text{вн}} = 25^\circ\text{C}$ ,  $\alpha = 6 \text{ Вт/м}^2\text{°C}$  получено  $\lambda = 1,1 \text{ Вт/м}^\circ\text{C}$ ,  $a = 2,07 \text{ м}^2/\text{с}$ .

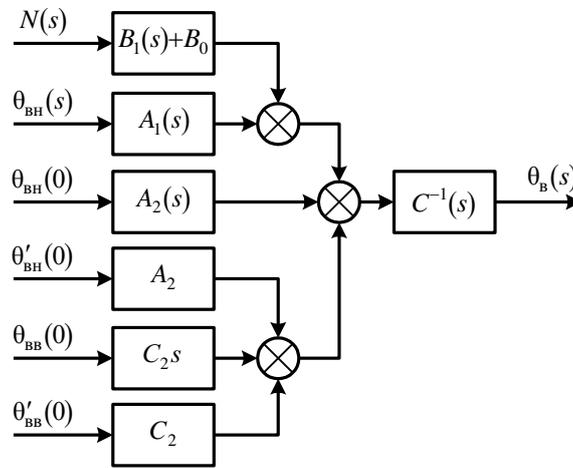


Рис. 4. Структурная схема процесса теплообмена элементов отсека

Учитывая начальные значения переменных и пренебрегая величиной  $T_3$  вследствие ее малости по сравнению с другими постоянными, выразим температуру  $\theta_{\text{в}}(s)$  из совместного рассмотрения (15)–(18):

$$\theta_{\text{вв}}(s) = \frac{A_2(s)\theta_{\text{вн}}(s) + (B_1s + B_0)N(s) + C_2\theta_{\text{вв}}(0) + C_2\theta'_{\text{вв}}(0) + A_2\theta_{\text{вн}}(0)s + A_2\theta'_{\text{вн}}(0)}{C(s)},$$

где

$$\begin{aligned} A_2(s) &= A_2s^2 + A_1s + A_0; \quad C(s) = C_3s^3 + C_2s^2 + C_1s + 1; \\ A_0 &= \frac{k_4k_5}{k_7}; \quad A_1 = a_1A_0; \quad A_2 = a_2A_0; \quad a_1 = T_{11} + T_{22}; \quad a_2 = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}; \\ C_1 &= T_{11} + \frac{1+k_3-k_4k_6}{k_7}T_{22} + \frac{1-k_3}{k_7}T_4; \quad C_2 = \frac{(1-k_2k_4)a_2 + [(1-k_3)T_{22}]T_4}{k_7}; \\ C_3 &= \frac{a_2}{k_7}T_4; \quad k_7 = 1 - k_3 - k_4k_6; \quad B_0 = \frac{k_3k_{N2}}{k_7}; \quad B_1 = B_0(T_{11} - k_{o2}T_{12}). \end{aligned}$$

Этому операторному уравнению соответствует структурная схема модели процесса теплообмена (рис. 4), которая может быть использована при построе-

нии системы управления температурой при перегреве оборудования, что обеспечивается за счет управления интенсивностью движения напольного транспортного средства.

Итак, получена математическая модель процесса нагрева отсека с электротехническим оборудованием, которая предназначена для построения системы управления интенсивностью движения напольного транспортного средства.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности: Учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
2. *Котенев В.И.* Приближенный метод решения задач нестационарной теплопроводности // Известия Академии наук СССР. Энергетика и транспорт. – 1989. – № 3. – С. 111-116.
3. *Котенев В.И., Котенев А.В.* Аппроксимация уравнений теплопроводности конечным числом типовых динамических звеньев // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2013. – № 2(38). – С. 159-164.
4. *Котенев В.И. и др.* Аппроксимация объектов нестационарной теплопроводности типовыми динамическими звеньями // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2013. – № 1(37). – С. 197–202.

*Статья поступила в редакцию 7 сентября 2014 г.*

## MATHEMATICAL MODEL OF THE PROCESS OF HEATING ELECTRICAL EQUIPMENT COMPARTMENT OF A FLOOR VEHICLE FOR CONTROL OF ITS DRIVE PERFORMANCE

*V.I. Kotenev, A.V. Kotenev*

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia

*The model is constructed on the basis of the equation of non-stationary heat conductivity of a sphere equivalent to basic the electric-equipment heat dissipating elements in its heatmass characteristics, the heat exchange equation between the air in the compartment, the sphere surface and the compartment internal surface, and also on the basis of the equation of the thermal balance between the compartment external surface and atmospheric air. The heat conduction equation of the sphere is approximated by an ordinary differential equation of the second order by the method of integrated elements To determine the limits of Biot numbers, which require the clarification of the method of integral elements, a graph of the relative values of the deviations from the exact approximate solutions is constructed for different Biot numbers and different values of the exponent of the coordinate function. A block diagram of the electrical equipment compartment as the control object is developed, which is designed to build a temperature limiter in the compartment by controlling the floor vehicle drive performance.*

**Keywords:** *mathematical model, equations of mathematical physics, heat exchange, control of distributed parameter objects.*

---

*Viktor I. Kotenev (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.  
Aleksander V. Kotenev (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.*