

УДК 519.246.27

ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРА АМПЛИТУД НА ОСНОВЕ ОБРАБОТКИ ПСЕВДОАНСАМБЛЯ ЗНАКОВОГО АНАЛОГО-СТОХАСТИЧЕСКОГО КВАНТОВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА*

В.Н. Якимов¹, О.В. Горбачёв²

¹ Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

² ООО «Открытый код»
Россия, 443001, г. Самара, ул. Ярмарочная, 55

Представлены быстрые цифровые алгоритмы вычисления оценок коэффициентов Фурье. Они разработаны на основе знакового аналого-стохастического квантования, которое используется в качестве первичного преобразования исследуемых случайных процессов. Для повышения статистической устойчивости вычисления оценок спектра амплитуд используется метод разбиения анализируемого процесса на отдельные сегменты. В соответствии с этим методом оценка спектра амплитуд осуществляется усреднением результатов обработки отдельных сегментов. Для проверки метрологических характеристик разработанных алгоритмов были проведены экспериментальные исследования по оценке спектра амплитуд модели случайного процесса. Модель представляла собой сумму независимых в статистическом смысле гармонических составляющих в аддитивном шуме. Приведены результаты вычисления оценок спектра амплитуд по одному, трем, семи и десяти сегментам. Обработка сегментов проводилась с их половинным перекрытием.

Ключевые слова: гармонический анализ, случайный процесс, спектр амплитуд, знаковое аналого-стохастическое квантование, быстрые алгоритмы, программное обеспечение измерительной системы.

Гармонический анализ является одним из наиболее эффективных методов исследования случайных процессов. Данный вид анализа позволяет получить представление о распределении мощности (дисперсии) исследуемого процесса по частотам составляющих его гармоник. При этом в настоящее время широкое применение получил цифровой гармонический анализ, в основе которого лежит прямое дискретное преобразование Фурье. Однако при анализе многокомпонентных широкополосных случайных процессов для вычисления дискретных спектральных оценок классические цифровые алгоритмы гармонического анализа даже при использовании быстрого преобразования Фурье могут потребовать существенных временных затрат на обработку многозарядных отсчетов, полученных в ходе равномерной дискретизации во времени и многоуровневого квантования. Данное обстоятельство приводит к необходимости разработки новых быстродействующих цифровых алгоритмов гармонического анализа.

В [1-3] разработан подход, который обеспечивает повышение быстродей-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-00036-А).

Владимир Николаевич Якимов (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Информационные технологии».

Олег Викторович Горбачев, специалист.

ствия цифровых процедур гармонического анализа за счет использования в качестве первичного преобразования исследуемого процесса $X(t)$ знакового аналого-стохастического квантования. Данный вид квантования основан на формировании знакового сигнала [4]

$$z(t) = \operatorname{sgn} \left\{ \overset{o}{x}(t) + \xi(t) \right\},$$

где $\operatorname{sgn}\{\dots\}$ – оператор знакового преобразования, результат которого может принимать значения, равные только «+1», если $\overset{o}{x}(t) > \xi(t)$, и «-1», если $\overset{o}{x}(t) < \xi(t)$; $\overset{o}{x}(t)$ – центрированная, т. е. имеющая нулевое математическое ожидание, реализация исследуемого многокомпонентного процесса $X(t)$; $\xi(t)$ – вспомогательный случайный процесс (ВСП).

Мгновенные значения ВСП распределены равномерно внутри интервала от « $-X_{\max}$ » до « $+X_{\max}$ ». Здесь $X_{\max} \geq |\overset{o}{x}(t)|_{\max}$, где $|\overset{o}{x}(t)|_{\max}$ – максимально возможное по абсолютной величине значение, которое может принять $\overset{o}{x}(t)$.

Согласно разработанному подходу в [1] оценки коэффициентов Фурье на интервале времени $0 \leq t \leq T$ вычисляются следующим образом:

$$\hat{a}_k = 2X_{\max}T^{-1} \int_0^T z(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt; \quad k = 1, 2, 3, \dots, K;$$

$$\hat{b}_k = 2X_{\max}T^{-1} \int_0^T z(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt; \quad k = 1, 2, 3, \dots, K,$$

где $f_0 = T^{-1}$ определяет интервал дискретизации по частоте;

K – число подлежащих оцениванию гармонических компонент с частотами kf_0 .

В [1, 2] математически обосновано, что оценки \hat{a}_k и \hat{b}_k являются несмещенными и состоятельными. В соответствии со свойством состоятельности для дисперсий $D[\hat{a}_k]$ и $D[\hat{b}_k]$ этих оценок имеем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D[\hat{a}_k] = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} D[\hat{b}_k] = 0.$$

Данные предельные соотношения свидетельствуют о том, что оценки \hat{a}_k и \hat{b}_k при $T \rightarrow \infty$ сходятся по вероятности к искомым коэффициентам Фурье. Исходя из этого для уменьшения их дисперсий используем метод сегментирования и усреднения, который, в частности, описан в работе [5]. Согласно этому методу будем вычислять оценки \hat{a}_k и \hat{b}_k по отдельным сегментам знакового сигнала $z(t)$ с последующим усреднением полученных результатов.

На рис. 1 представлена иллюстрация процедуры сегментирования знакового сигнала $z(t)$. Сегменты $z(m, t)$, длительность каждого из которых равна T , сдвинуты во времени друг относительно друга на значение T_0 , так что они связаны с подлежащим обработке знаковым сигналом $z(t)$ соотношением

$$z(m, t) = z(t + (m-1)T_0), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 1 \leq m \leq M,$$

где M – число сегментов (для случая, приведенного на рис. 1, $M = 5$).

В приведенном на рис. 1 примере $T_0 < T$, т. е. имеет место частичное перекрытие соседних сегментов. Целью такого формирования сегментов с частичным перекрытием является увеличение их числа при заданной или ограниченной общей продолжительности времени анализа T_A .

Оценки коэффициентов ряда Фурье \hat{a}_k и \hat{b}_k в процессе гармонического анализа для каждого из сегментов $z(m, t)$ будем искать в следующем виде:

$$\hat{a}_{k,m} = 2X_{\max} T^{-1} \int_0^T z(m, t) \cos(2\pi k f_0 t) dt = 2X_{\max} T^{-1} \int_{(m-1)T_0}^{(m-1)T_0+T} z(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt;$$

$$\hat{b}_{k,m} = 2X_{\max} T^{-1} \int_0^T z(m, t) \sin(2\pi k f_0 t) dt = 2X_{\max} T^{-1} \int_{(m-1)T_0}^{(m-1)T_0+T} z(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt;$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, K; \quad 1 \leq m \leq M.$$

В свою очередь, оценки амплитудного спектра будем вычислять следующим образом:

$$\hat{A}_k = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \hat{A}_{k,m} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sqrt{\hat{a}_{k,m}^2 + \hat{b}_{k,m}^2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, K.$$

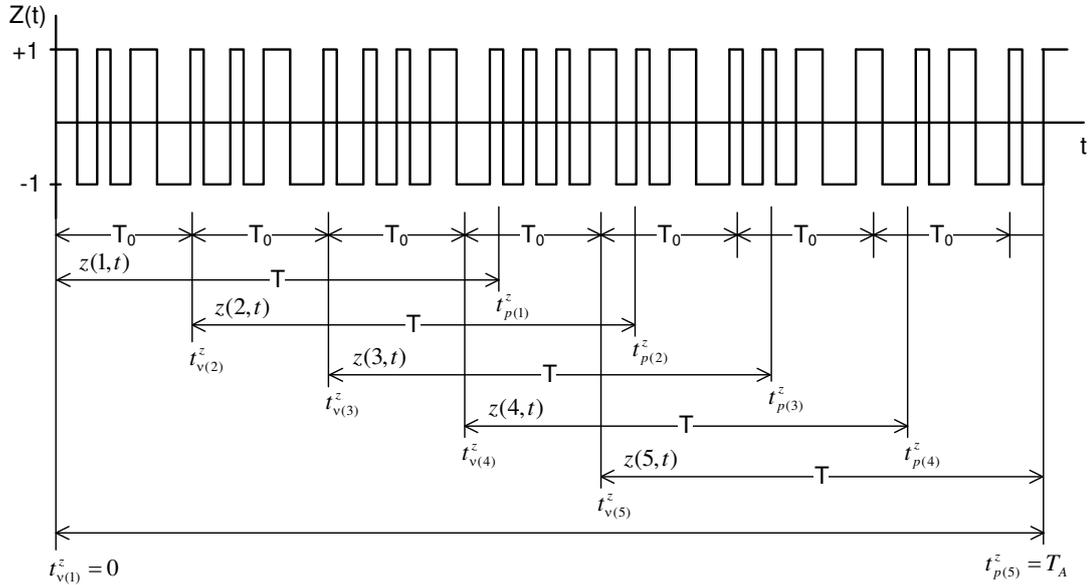


Рис. 1. Сегментирование знакового сигнала $z(t)$

Значения «-1» и «+1», являющиеся результатом знакового аналого-стохастического квантования, строго последовательно сменяют друг друга во времени. Поэтому сегменты $z(m, t)$ в пределах интервалов времени их формиро-

вания $(m-1)T_0 \leq t \leq (m-1)T_0 + T$ можно однозначно представить с помощью конечных множеств

$$\left\{ z((m-1)T_0); t_i^z, v(m) \leq i \leq p(m) \right\}, 1 \leq m \leq M,$$

где $z((m-1)T_0)$ – значения, которые знаковый сигнал $z(t)$ принимает в моменты времени $t_{v(m)}^z = (m-1)T_0$, определяемые началом формирования каждого из сегментов $z(m, t)$;

$\left\{ t_i^z, v(m)+1 \leq i \leq p(m)-1 \right\}$ – отсчеты моментов времени, в которые эти сегменты пересекают нулевой уровень (т. е. меняют свое текущее значение на противоположное);

$$t_{p(m)}^z = (m-1)T_0 + T.$$

Индексы $v(m)$ и $p(m)$ являются целыми числами и обозначены именно так, чтобы показать их зависимость от номера сегмента $z(m, t)$.

Принимая во внимание, что в пределах интервалов времени $t_i^z \leq t \leq t_{i+1}^z$ для $v(m)+1 \leq i \leq p(m)-1$ значения сегментов $z(m, t)$ остаются постоянными, интегралы в выражениях для оценок \hat{a}_k и \hat{b}_k могут быть вычислены аналитически. Тогда после интегрирования получаем

$$\hat{a}_{k,m} = -2(k\pi)^{-1} X_{\max} z((m-1)T_0) \sum_{i=v(m)}^{p(m)} (-1)^{i-v(m)} \lambda_i \sin(2\pi k f_0 t_i^z), k = 1, 2, 3, \dots, K;$$

$$\hat{b}_{k,m} = 2(k\pi)^{-1} X_{\max} z((m-1)T_0) \sum_{i=v(m)}^{p(m)} (-1)^{i-v(m)} \lambda_i \cos(2\pi k f_0 t_i^z), k = 1, 2, 3, \dots, K;$$

$$\lambda_i = \begin{cases} 1, & i = v(m) \text{ и } i = p(m); \\ 2, & v(m)+1 \leq i \leq p(m)-1. \end{cases}$$

Оценки амплитудного спектра будут вычисляться следующим образом:

$$\hat{A}_{k,m}^2 = \hat{a}_{k,m}^2 + \hat{b}_{k,m}^2 = \frac{2X_{\max}^2}{(k\pi)^2} \left(2(p(m)-v(m))-1 + \sum_{i=v(m)}^{p(m)-1} (-1)^{i-v(m)} \lambda_i \sum_{j=i+1}^{p(m)} (-1)^{j-v(m)} \lambda_j \cos(2\pi k f_0 (t_j^z - t_i^z)) \right).$$

Полученные алгоритмы вычисления \hat{a}_k , \hat{b}_k и $\hat{A}_{k,m}^2$ не требуют выполнения многоразрядных цифровых операций умножения. Основными операциями этих алгоритмов являются арифметические операции суммирования и вычитания фильтрующих функций \sin и \cos . Данное обстоятельство ведет к увеличению быстродействия процедур гармонического анализа.

На основе выше разработанных алгоритмов вычисления \hat{a}_k , \hat{b}_k и $\hat{A}_{k,m}^2$ был разработан специализированный программный модуль, предназначенный для функционирования в составе программного обеспечения измерительной системы

комплексного оперативного анализа многокомпонентных процессов.

Для проверки метрологических характеристик разработанных алгоритмов были проведены экспериментальные исследования на основе имитационного моделирования процедуры аналого-стохастического квантования. При этом модель центрированной реализации $\overset{o}{x}(t)$ анализируемого процесса представляла собой сумму независимых в статистическом смысле гармонических составляющих в аддитивном шуме $e(t)$, т. е.

$$\overset{o}{x}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^K A_k^H \cos(2\pi f_k^H t + \varphi_k) + e(t) .$$

Гармонические составляющие генерировались с частотами $f_k^H \in]0; 0,5]$, которые интерпретировались как нормированные $f_k^H = f_k / 2F_{\max}$, где частота F_{\max} рассматривается как верхняя граничная частота диапазона, в пределах которого осуществляется гармонический анализ. Использование в ходе экспериментальных исследований понятия нормированных частот объясняется тем, что это обеспечивает постоянство частотного диапазона представления результатов гармонического анализа моделей процессов, имеющих априори различные частотные диапазоны. Амплитуды гармонических составляющих A_k^H принимались равными от нуля до единицы и также интерпретировались как нормированные. Начальные фазы φ_k гармонических составляющих задавались генератором равномерно распределенных величин из интервала $-\pi \leq \varphi_k \leq \pi$. Аддитивный шум $e(t)$ представлял собой белый шум с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

В частности, модель реализации $\overset{o}{x}(t)$ содержала шесть гармонических составляющих с нормированными частотами

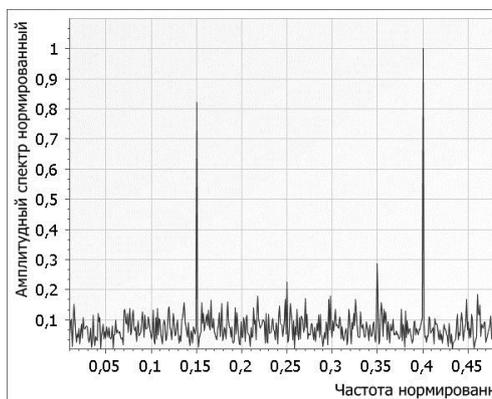
$$f_1^H = 0,08, f_2^H = 0,15, f_3^H = 0,25, f_4^H = 0,35, f_5^H = 0,4 \text{ и } f_6^H = 0,48 .$$

При этом нормированные амплитуды этих гармонических составляющих были соответственно равны

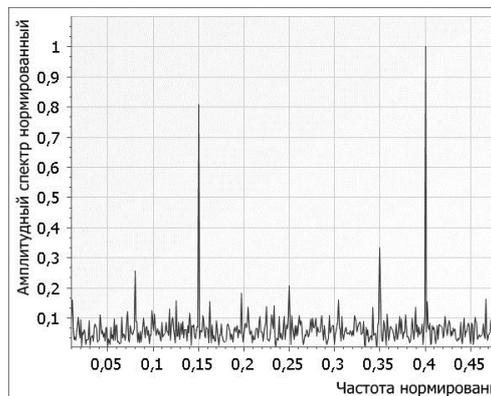
$$A_1^H = 0,25, A_2^H = 0,8, A_3^H = 0,2, A_4^H = 0,3, A_5^H = 1 \text{ и } A_6^H = 0,6 .$$

На рис. 2 представлены оценки спектра амплитуд, полученные в результате обработки одного, трех, семи и десяти сегментов. При этом обработка сегментов проводилась с их половинным перекрытием.

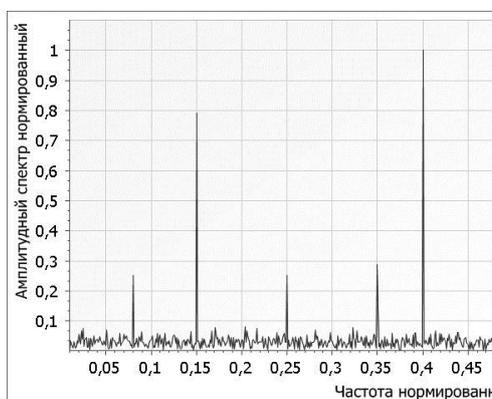
Хорошо видно, что с увеличением числа обрабатываемых сегментов наблюдается постепенное улучшение разрешения гармонических составляющих. Уже для семи сегментов имеет место устойчивая идентификация гармонических составляющих. На последнем графике, полученном для десяти сегментов, положение в спектре всех шести гармонических составляющих точно соответствует их исходным значениям. Ложных спектральных пиков в спектре не наблюдается, также не наблюдается расщепление спектральных линий. Каждая спектральная линия четко различима, и сильные гармонические составляющие не маскируют слабые.



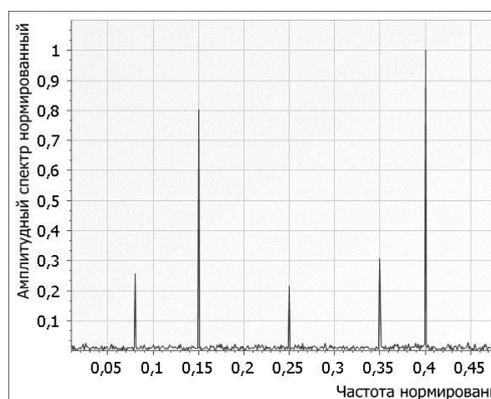
a



б



в



г

Рис. 2. Оценка спектра амплитуд:

a – один сегмент; *б* – три сегмента; *в* – семь сегментов; *г* – десять сегментов

Таким образом, полученные результаты моделирования позволяют сделать вывод о том, что с помощью разработанных алгоритмов можно с высокой точностью и разрешением по частоте осуществлять цифровой гармонический анализ многокомпонентных процессов. При этом практическая реализация данных алгоритмов не требует выполнения многочисленных операций цифрового умножения многозарядных отсчетов реализаций исследуемых процессов, что обеспечивает их более высокую вычислительную эффективность по сравнению с классическими цифровыми процедурами гармонического анализа.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Якимов В.Н. Цифровой гармонический анализ многокомпонентных случайных процессов // Измерительная техника. – 2006. – № 4. – С. 22–26.
2. Yakimov V.N. Digital harmonic analysis of multicomponent random processes // Measurement Techniques. – Publisher: Springer New York. – Vol. 49, No. 4. – Pp. 341–347.
3. Якимов В.Н., Горбачев О.В. Программно-аппаратное обеспечение системы оценки амплитудного спектра многокомпонентных процессов // Приборы и техника эксперимента. – 2013. – № 5. – С. 49–55.

4. Якимов В.Н. Обобщенная математическая модель двухуровневого знакового преобразования // Техника машиностроения. – 2000. – № 4. – С. 72–74.
5. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.

Статья поступила в редакцию 10 февраля 2015 г.

CALCULATION OF THE SPECTRUM AMPLITUDES BASED PROCESSING PSEUDOENSEMBLES SIGN-FUNCTION ANALOG-STOCHASTIC QUANTIZATION OF RANDOM PROCESS

V.N. Yakimov¹, O.V. Gorbachev²

¹ Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

² Open Code Ltd., Russia,
55, Yarmarochnaya st., Samara, 443001, Russian Federation

Fast digital algorithms for computing estimates of the Fourier coefficients are presented. They are based on the sign-function analog-stochastic quantization which is used as primary transformation of investigated random processes. We used the method of partitioning the process analyzed into individual segments to enhance the statistical stability of estimates calculating amplitude spectrum. In accordance with this method the final spectral amplitude estimation is performed by averaging of the processing results of individual segments. To test the metrological characteristics of the developed algorithms we carried out experimental research of estimates amplitude spectrum using the model of a random process. This model represents the sum of statistically independent harmonic components in the additive white noise. For example we present the results of the calculation of spectral amplitude estimation for one, three, seven and ten segments. Processing segments was carried out with their half-overlapping.

Keywords: *Harmonic analysis, random process, amplitude spectrum, sign-function analog-stochastic quantization, fast algorithm, software for measuring system.*

*Vladimir N. Yakimov (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.
Oleg V. Gorbachev, Specialist.*