

УДК 681.5.015

**МЕТОД ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ФИЛЬТРАЦИЕЙ ВОЗМУЩЕНИЙ\****А.Н. Дилигенская*Самарский государственный технический университет  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

*Рассматривается решение граничной обратной задачи теплопроводности по восстановлению плотности теплового потока на основе метода минимаксной оптимизации в случае возмущенных исходных данных при использовании предварительного сглаживания с помощью сглаживающего кубического сплайна. Решение сводится к решению задачи параметрической оптимизации, обеспечивающей минимизацию невязки между полученным аппроксимирующим сплайном и точным решением прямой задачи теплопроводности, соответствующим искомой характеристике. Исследован характер конфигурации погрешности аппроксимации искомой характеристики при изменении интенсивности возмущающего воздействия на допустимом диапазоне и при различной степени сглаживания сплайна. Показана возможность решения обратных задач теплопроводности на основе параметризации управляющих воздействий с применением предварительного сглаживания с помощью построения сглаживающих сплайнов при невысоком уровне помех.*

**Ключевые слова:** *граничная обратная задача теплопроводности, случайное возмущение, сглаживающий кубический сплайн, метод параметрической оптимизации, конфигурация погрешности аппроксимации температурного поля.*

Исследование сложных процессов теплопроводности, определение условий теплообмена, изучение теплофизических характеристик и свойств материалов может быть основано на решении обратных задач теплопроводности (ОЗТ). Постановка ОЗТ предусматривает определение параметров или характеристик тепловых процессов по полученным экспериментально реализациям температурного состояния объекта, в реальных условиях неизбежно содержащим случайные возмущения.

В общем случае ОЗТ являются некорректными задачами математической физики [1], неустойчивыми к малым отклонениям входных данных, при этом увеличение уровня возмущения ведет к уменьшению степени влияния искомой характеристики на измеряемую температуру, что, соответственно, повышает неустойчивость задачи и увеличивает погрешность восстановления искомым характеристикам. В такой ситуации одним из эффективных способов улучшения качества идентификации является предварительное сглаживание исходных данных. Базовыми подходами к сглаживанию входной информации, позволяющими получить достаточно точные результаты, обладающие при этом необходимой гладкостью, являются метод регуляризации А.Н. Тихонова [2] и метод сглаживающих кубических сплайнов [3-5]. Также для сглаживания экспериментальных

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-08-06872 и проект № 14-08-00446).

Анна Николаевна Дилигенская (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Автоматика и управление в технических системах».

данных могут использоваться линейные комбинации полиномов [5], метод регрессии [6, 7] и некоторые другие подходы.

Для решения ОЗТ, сформулированных в экстремальной постановке, может быть применен метод параметрической оптимизации [8, 9], основанный на базовых закономерностях теории оптимального управления для объектов с распределенными параметрами (ОРП) [10]. Искомая характеристика рассматривается как оптимальное управляющее воздействие  $u$  объекта. Исходя из требований достаточной гладкости решений производится сужение их множества до класса физически реализуемых функций [1], что позволяет получить с помощью известных условий оптимальности ОРП параметрическое представление искомого управления с точностью до некоторого вектора параметров  $\Delta$  [9]. В большинстве физически обоснованных случаев поиск оптимального управления достаточно осуществлять в классе непрерывных и непрерывно-дифференцируемых на интервале  $\varphi \in [0, \varphi^0]$  идентификации функций  $u(\varphi) \in C^2[0, \varphi^0]$ , и в этом случае его параметрическое представление имеет вид кусочно-параболических зависимостей [9], характеризующихся числом  $n$  и длительностями знакопеременяющихся интервалов постоянства второй производной оптимального управляющего воздействия. Сужение множества решений до класса корректности соответствует естественной регуляризации и приводит к условно-корректной постановке задачи, обеспечивая тем самым редукцию исходной задачи к задаче параметрической оптимизации (ЗПО), рассматриваемой на замкнутом компактном множестве параметров [9].

Для решения полученной ЗПО используется специальный метод [11], основанный на альтернативных свойствах оптимальных решений, подобных свойствам наилучших равномерных приближений заданных функций к нулю. Этот метод фиксирует на заданном временном интервале идентификации знакопеременяющиеся минимаксные отклонения расчетных значений температуры  $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$ , полученных в контролируемой точке  $x^*$  при оптимальном управлении  $u^*(\varphi, \Delta^0)$ , характеризующемся вектором параметров  $\Delta = \Delta^0$ , от наблюдаемых в этой точке температур  $\theta^*(\varphi)$ , и тем самым позволяет однозначно определить конфигурацию погрешности аппроксимации температурного состояния  $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi)$ .

На основе указанных свойств возможно составить замкнутую относительно всех параметров  $\Delta^0$  оптимального процесса систему уравнений для предельных разностей температур  $\theta(x^*, \varphi_q^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_q^0)$ , наблюдаемых в отдельные моменты времени  $\varphi_q^0, q = \overline{1, n+3}$ . Дальнейшее решение задачи численными методами позволяет получить оптимальные значения параметров  $\Delta^0$  процесса, однозначно задающие искомую характеристику  $u$  ОЗТ.

Данный метод был успешно применен для решения одномерных граничных ОЗТ [9], внутренних задач по определению мощности внутренних источников тепла или закона их пространственного распределения [12] и коэффициентных задач [13, 14] для тел канонической формы на основе точных экспериментальных данных о температурном распределении.

Принципиальной особенностью рассматриваемого подхода является задание формы кривой погрешности  $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi)$  аппроксимации температурного поля, которая при оптимальных значениях вектора параметров  $\Delta = \Delta^0$  имеет од-

нозначный характер. Учет возмущающего воздействия даже небольшой интенсивности, незначительно влияющего на результирующее температурное состояние  $\theta^*(\varphi)$ , существенно искажает форму кривой разности  $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi)$  модельного температурного распределения и заданного, когда величины  $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$  и  $\theta^*(\varphi)$  имеют значения одного и того же или близких порядков. Их разность  $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi)$  фактически нивелирует детерминированную составляющую, вызванную исследуемой характеристикой  $u$ , оставляя только случайное возмущение. Решение ОЗТ по определению параметров или характеристик тепловых процессов без применения специальных алгоритмов обработки входных данных в этом случае невозможно, и сама такая задача не имеет смысла.

В настоящей работе показана возможность применения метода минимаксной оптимизации на примере решения граничной обратной задачи теплопроводности по восстановлению плотности теплового потока  $q(\varphi)$  в случае возмущенных исходных данных при использовании предварительного сглаживания на основе аппроксимирующего (сглаживающего) кубического сплайна. Задача восстановления  $q(\varphi)$  на границе  $x=1$  решалась на примере линейного одномерного нестационарного уравнения теплопроводности в относительных единицах безразмерного времени (число Фурье)  $\varphi$  и пространственной координаты  $x \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(x, \varphi)}{\partial \varphi} &= \frac{\partial^2 \theta(x, \varphi)}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, & 0 < \varphi \leq \varphi^0; \\ \frac{\partial \theta(1, \varphi)}{\partial x} &= q(\varphi), \quad \frac{\partial \theta(0, \varphi)}{\partial x} = 0, & \varphi \in [0, \varphi^0]; & \theta(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1] \end{aligned} \quad (1)$$

В качестве экспериментальных данных  $\theta^*(\varphi) = \theta^*(\varphi_i)$  рассматривались заданные на некоторой регулярной временной сетке  $\varphi = [\varphi_i], i = \overline{1, M}$  значения функции  $\theta^*(\varphi) = \theta^0(x^*, \varphi) + \delta \cdot rand$ , представляющие собой смесь решения  $\theta^0(x^*, \varphi)$  прямой задачи (1), полученного в некоторой фиксированной точке  $x^* \in [0, 1)$  при заданной входной характеристике  $q(\varphi) = q^0(\varphi)$ , и случайного возмущения. Моделирующие погрешность случайные величины статистически независимы и подчинены гауссовому распределению с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\delta^2$  (функция *rand* является генератором случайных чисел, распределенных по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией).

Требуется восстановить величину тепловых потерь  $u^*(\varphi) = q^*(\varphi)$ , минимизирующую невязку между сглаженной экспериментальной информацией  $\theta^*(\varphi)$  и точным решением  $\theta(x^*, \varphi)$  краевой задачи (1) соответствующим  $u^*(\varphi)$ .

Для фильтрации экспериментальных данных  $\theta^*(\varphi)$  использовались кубические сплайны  $S(\varphi) = S(\varphi | \theta_j)$ , получаемые на выборке  $\theta_j(\varphi)$  – наборе значений  $\theta(x, \varphi)$  в узлах сплайна  $\bar{\varphi}_j, j = \overline{1, N}, N \ll M$ . Каждый узел  $\bar{\varphi}_j$  совпадает с какой-нибудь точкой  $\varphi_i$ , причем  $\bar{\varphi}_1 = \varphi_1 = 0, \bar{\varphi}_N = \varphi_M = \varphi^0$ .

На каждом из отрезков  $[\bar{\varphi}_j, \bar{\varphi}_{j+1}]$ ,  $j = \overline{1, N-1}$  сплайн  $S(\varphi)$  является кубическим многочленом, определяется четырьмя коэффициентами и может быть представлен в виде

$$S(\varphi) = a_{j0} + a_{j1}(\varphi - \bar{\varphi}_j) + a_{j2}(\varphi - \bar{\varphi}_j)^2 + a_{j3}(\varphi - \bar{\varphi}_j)^3. \quad (2)$$

Коэффициенты сплайна находятся из условия минимума целевого функционала

$$J(S) = p \sum_{j=1}^N (\theta^*(\bar{\varphi}_j) - S(\bar{\varphi}_j))^2 + (1-p) \int_{\bar{\varphi}_1}^{\bar{\varphi}_N} (S''(\varphi))^2 d\varphi, \quad (3)$$

обеспечивающего компромисс между сглаживающими и интерполяционными свойствами сплайна за счет выбора сглаживающего параметра  $p \in [0,1]$ , и условия сопряжения звеньев сплайна, задающего непрерывность второй производной  $S''(\varphi)$  в его узлах [4]. Формулы для расчета коэффициентов приведены в [4].

После построения аппроксимирующего сплайна  $S(\varphi)$  решение граничной ОЗТ на основе метода параметрической оптимизации сводится к решению ЗПО

$$I_0(\Delta) = \max_{\varphi \in [0, \varphi^0]} |\theta(x^*, \varphi, \Delta) - S(\varphi)| \rightarrow \min_{\Delta \in G_{n+2}}, \quad (4)$$

в которой вектор параметров  $\Delta$  задан на замкнутом ограниченном множестве  $G_{n+2} : \Delta \in G_{n+2}$  [9, 12].

Расчетная замкнутая система уравнений для определения оптимальных значений  $\Delta^0 = (\Delta_k^0)$ ,  $k = n+2$  (при  $u(\varphi) \in C^2[0, \varphi^0]$ ) вектора параметров  $\Delta$  при заданном числе  $n$  принимает вид

$$\theta(x^*, \varphi_q^0, \Delta^0) - S(\varphi_q^0) = (-1)^{q+1} \beta I_0(\Delta^0), \quad q = \overline{1, n+3}; \beta = \pm 1; \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta(x^*, \varphi_q^0, \Delta^0) - S(\varphi_q^0)) = 0. \quad (6)$$

С использованием предварительного сглаживания возмущенных исходных данных  $\theta^*(\varphi)$  на основе минимаксной оптимизации была решена граничная задача по восстановлению плотности теплового потока  $u(\varphi) = q(\varphi)$  в классе непрерывных и непрерывно-дифференцируемых на интервале  $[0, \varphi^0]$  функций при параметрическом представлении искомой характеристики в виде кусочно-параболической зависимости с числом  $n = 2$  интервалов постоянства  $u''(\varphi)$ . Заданное воздействие  $q^0(\varphi)$  носило экспоненциальный характер изменения во времени  $q^0(\varphi) = 1 - e^{-\beta\varphi}$ ;  $\beta = 2$ . Результаты восстановления граничного воздействия представлены на рис. 1, 2.

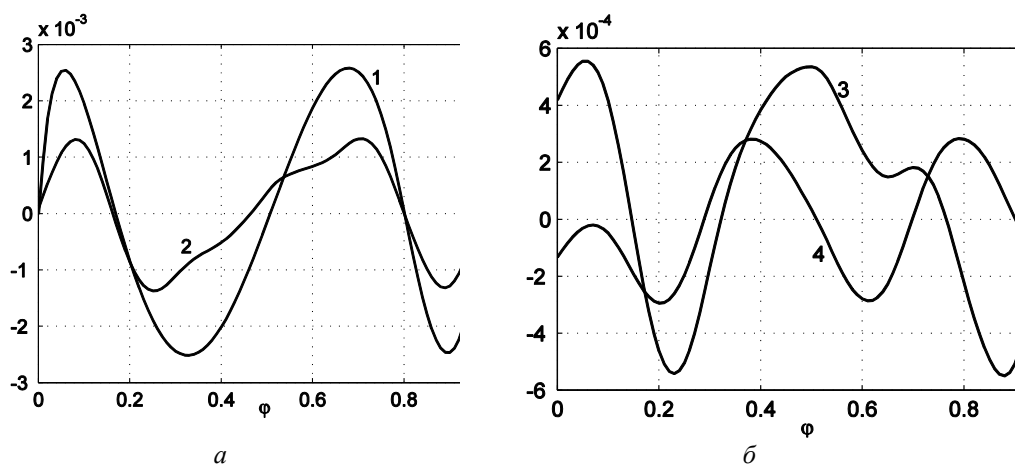


Рис. 1. Погрешность аппроксимации температурного поля

$$\varepsilon(\theta) = \frac{\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - S(\varphi)}{\theta_{\max}^0}, \%$$
 при  $\delta = 0$  (кривая 1),  $\delta = 0.5\%$  (кривая 2) (а),  $\delta = 1\%$  (кривая 3) и  $\delta = 2\%$  (кривая 4) (б);  $\theta_{\max}^0$  – максимальное значение исходного незашумленного температурного распределения

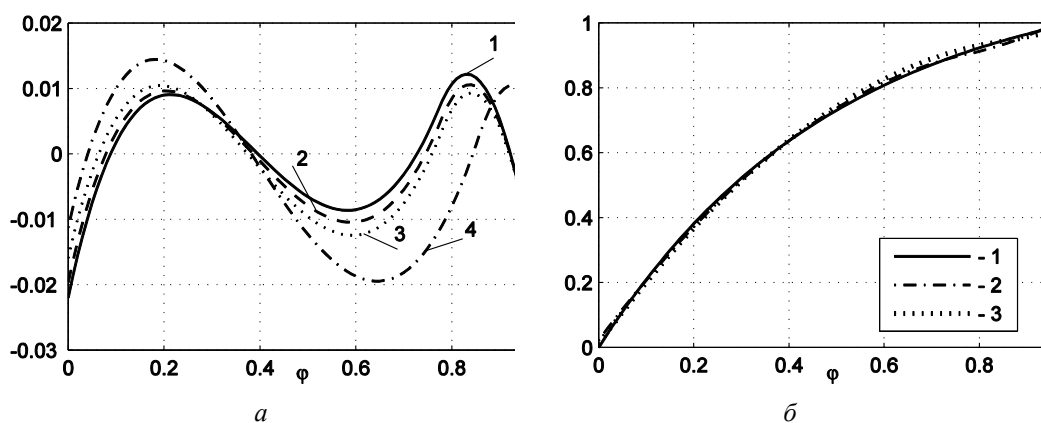


Рис. 2. Погрешность аппроксимации граничного воздействия

$$\varepsilon(u) = \frac{u(\varphi, \Delta^0) - q^0(\varphi)}{q_{\max}^0}, \%$$
 при  $\delta = 0$  (кривая 1),  $\delta = 0.5\%$  (кривая 2),  $\delta = 1\%$  (кривая 3) и  $\delta = 2\%$  (кривая 4) (а), точное значение плотности теплового потока (кривая 1) и ее восстановленные значения при  $\delta = 0$  (кривая 2) и  $\delta = 2\%$  (кривая 3) (б);  $q_{\max}^0$  – максимальное значение заданной плотности теплового потока

Полученные результаты (см. таблицу) показывают удовлетворительное качество решения граничной ОЗТ на основе параметрической оптимизации при использовании предварительного сглаживания при невысоком уровне помех ( $\delta \leq 2.5\%$ ).

**Результаты восстановления плотности теплового потока  $q(\varphi)$  при  $\delta \in [0, 2]\%$**

$\delta, \%$	0	0,5	1	2
$ \varepsilon(\theta) , \%$	$2.860 \cdot 10^{-3}$	$1.327 \cdot 10^{-3}$	$0.592 \cdot 10^{-3}$	$0.287 \cdot 10^{-3}$
$ \varepsilon(u) , \%$	$2.931 \cdot 10^{-2}$	$2.825 \cdot 10^{-2}$	$2.806 \cdot 10^{-2}$	$1.945 \cdot 10^{-2}$
$ \varepsilon_{RMS}(u) , \%$	$1.053 \cdot 10^{-2}$	$1.049 \cdot 10^{-2}$	$1.048 \cdot 10^{-2}$	$9.935 \cdot 10^{-3}$

При этом наблюдается парадоксальная на первый взгляд ситуация: на рассматриваемом диапазоне интенсивности возмущающего воздействия с увеличением уровня помех как минимаксная погрешность восстановления теплового потока  $\varepsilon(u) = \frac{u(\varphi, \Delta^0) - q^0(\varphi)}{q_{\max}^0}$ , так и среднеквадратичная погрешность

$$e_{RMS}(u) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left( \frac{u^*(\varphi_m, \Delta^0) - q^0(\varphi_m)}{q_{\max}^0} \right)^2}$$

уменьшаются. Это объясняется изме-

нением конфигурации погрешности аппроксимации управляющего воздействия. При отсутствии возмущающего воздействия решение задачи производится на основе точных данных без построения сплайна, и погрешность восстановления  $q(\varphi)$  достигается преимущественно на границах интервала идентификации  $[0, \varphi^0]$ . С ростом возмущения форма  $u(\varphi, \Delta^0) - q^0(\varphi)$  изменяется, и минимаксное отклонение достигается во внутренней точке экстремума. При дальнейшем увеличении  $\delta$  эта тенденция сохраняется, и погрешность, наблюдаемая во внутренней точке экстремума, быстро возрастает, так же как и  $e_{RMS}(u)$ .

При этом с увеличением  $\delta$  при построении сплайна возрастают сложности по определению такого значения сглаживающего параметра  $p$ , которое позволяло бы найти оптимальные значения  $\Delta^0$ . Аппроксимирующие сплайны обладают сглаживающими свойствами по отношению к исходной функции разности  $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$  и незашумленного сигнала  $\theta^0(x^*, \varphi)$ , и полученное на их основе решение может отличаться от истинного тем больше, чем сильнее производится сглаживание, степень которого задается параметром  $p$ , выбор которого, в свою очередь, зависит от интенсивности возмущения.

Недостаточное сглаживание (при повышенном значении коэффициента  $p$ ) приводит к форме разности  $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - S(\varphi)$ , количество экстремумов которой превышает необходимый минимум для выполнения равенства  $R = n + 3$ , задающего число  $R$  точек альтернанса и, соответственно, определяющего количество  $R$  соотношений в системе (5).

В этом случае конфигурация кривой разности не определяется однозначным образом и количество вариантов решения может быть достаточно большим.

Уменьшение значения параметра  $p$  приводит к большему сглаживанию кривой  $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - S(\varphi)$ , что влечет за собой исчезновение дополнительных экстремумов, получение однозначной формы погрешности аппроксимации температурного поля и гарантирует единственность решения задачи поиска оптимальных значений  $\Delta^0$ . Дальнейшее уменьшение сглаживающего параметра при-

водит к еще большему сглаживанию, пропуску экстремумов и невозможности определения значений всех искомым параметров.

При небольшом уровне  $\delta$  для каждого значения  $p$  из допустимого диапазона  $p \in [p_{\min}, p_{\max}]$  задача имеет свое решение  $\Delta^0$ , различающееся конфигурацией  $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - S(\varphi)$ , при этом искомая характеристика  $u(\varphi, \Delta^0)$  изменяется незначительно (рис. 3).

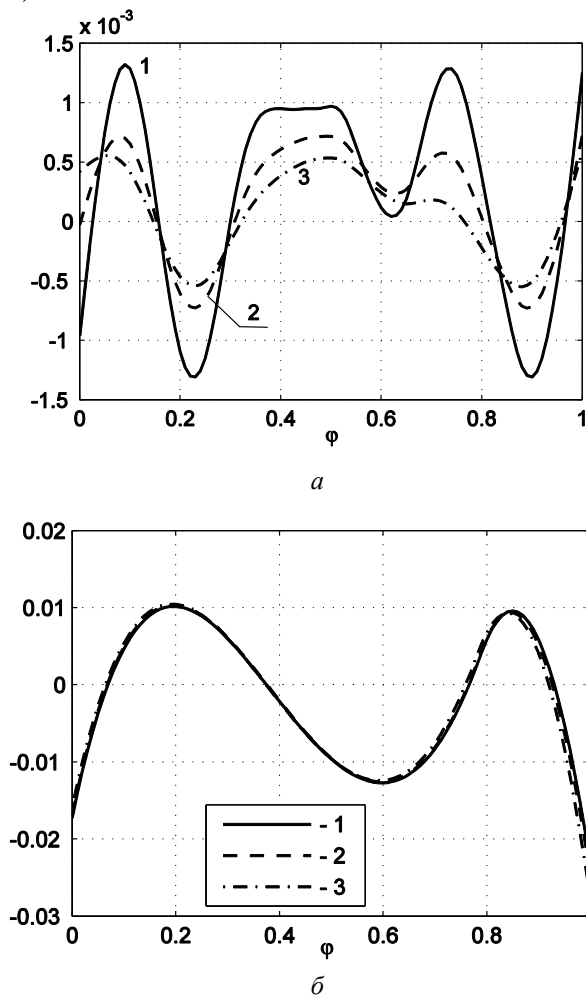


Рис. 3. Погрешность аппроксимации температурного поля

$$\varepsilon(\theta) = \frac{\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - S(\varphi)}{\theta_{\max}^0}, \% \quad (a) \text{ и управляющего воздействия}$$

$$\varepsilon(u) = \frac{u(\varphi, \Delta^0) - q^0(\varphi)}{q_{\max}^0}, \% \quad (b) \text{ при } \delta = 1\% \text{ для } p = 0.9997 \text{ (кривая 1), } p = 0.9992 \text{ (кривая 2), } p = 0.9984 \text{ (кривая 3)}$$

Проведенные исследования показывают возможность применения предварительного сглаживания с помощью построения сглаживающих сплайнов для решения обратных задач теплопроводности на основе параметризации управляющих воздействий и при невысоком уровне помех позволяют получить удовлетворительные результаты.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988.
2. Алгоритмы диагностики тепловых нагрузок летательных аппаратов / Под ред. В.П. Мишина. – М.: Машиностроение, 1983. – 168 с.
3. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
4. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 352 с.
5. Воскобойников Ю.Е., Преображенский Н.Г., Седельников А.И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. – Новосибирск: Наука, 1984. – 240 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
7. Cleveland W.S., Devlin S.J. Locally weighted regression: an approach to regression analysis by local fitting // J. Amer. Stat. Assoc. – 1988. – V. 83. – № 403. – P. 596–610.
8. Плишивцева Ю.Э., Рапопорт Э.Я. Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – № 3. – С. 22-33.
9. Рапопорт Э.Я., Плишивцева Ю.Э. Специальные методы оптимизации в обратных задачах теплопроводности // Известия РАН. Энергетика. – 2002. – № 5. – С. 144-155.
10. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975.
11. Рапопорт Э.Я. Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. – М.: Наука, 2000.
12. Дилигенская А.Н., Рапопорт Э.Я. Аналитические методы параметрической оптимизации в обратных задачах теплопроводности с внутренним тепловыделением // Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 87. – № 5. – С. 1082-1089.
13. Дилигенская А.Н. Решение линейной коэффициентной обратной задачи теплопроводности на основе альтернативного метода оптимизации // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2013. – Вып. 3 (39). – С. 198-202.
14. Дилигенская А.Н. Альтернативный метод оптимизации в коэффициентной обратной задаче теплопроводности // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2014. – Вып. 4 (44). – С. 144-148.

*Статья поступила в редакцию 25 мая 2015 г.*

## METHOD OF PARAMETRIC OPTIMIZATION IN THE BOUNDARY INVERSE HEAT PROBLEM USING THE DISTURBANCE FILTERING

*A.N. Diligenskaya*

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

*This paper investigates the boundary inverse thermal conductivity problem of determining a value of heat losses in the typical case of the disturbed noisy temperature measurements. Firstly, the smoothing of experimental data by cubic splines smoothing method is applied. Secondly, the method of parametric optimization based on qualitative features of the error of approximation of the calculated temperature field to smoothed experimental data is presented. The time behaviour of approximating curve at different noise level and various value of smoothing parameter is investigated. The solubility of inverse thermal conductivity problem at low noise is shown.*

**Keywords:** *boundary inverse heat conduction problem, random disturbance, smoothing cubic spline, parametric optimization, approximating curve behaviour.*

---

*Anna N. Diligenskaya (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.*