

## Энергетика

УДК 532.546

### ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПЛАСТА ПО ПРОНИЦАЕМОСТИ НА ФИЛЬТРАЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ ПЛАСТОВОЙ ЖИДКОСТИ К ДОБЫВАЮЩИМ СКВАЖИНАМ

*Е.В. Андриянова, В.И. Астафьев*

Самарский государственный технический университет  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

*Рассмотрен процесс напорной установившейся фильтрации несжимаемой жидкости к конечной системе добывающих скважин в плоском горизонтальном пласте постоянной мощности  $h$  и проницаемости  $k_0$ . В пласте также расположена узкая изолированная область с постоянной по величине проницаемостью  $k_f$ . В частности, при величине  $k_f = 0$  эта неоднородность моделирует непроницаемую линзу (завесу), а при  $k_f = \infty$  – бесконечно проницаемую каверну или трещину в пласте. Для различных значений проницаемости  $k_f$  исследован характер процесса фильтрации, определен коэффициент продуктивности скважины, получено аналитическое выражение для величины скин-фактора, отражающего влияние трещины на продуктивность скважины.*

**Ключевые слова:** *фильтрация жидкости, высокопроницаемые трещины, малопроницаемые завесы, коэффициент продуктивности скважины, скин-фактор скважины с трещиной.*

Определенная часть запасов нефти сосредоточена в трещиноватых коллекторах [1]. Характерной особенностью процесса разработки таких месторождений является несоответствие продуктивности скважин и проницаемости породы, существенная зависимость индикаторной кривой от давления и т. п. На месторождениях с трещиноватыми коллекторами часто основной приток нефти к скважине происходит через одну трещину. Наличием трещин объясняется также быстрый прорыв воды в добывающую скважину при заводнении [1].

Изучение фильтрации нефти в трещиноватых коллекторах представляет интерес также и с точки зрения применения методов гидравлического разрыва пласта (ГРП). Гидравлический разрыв пласта в настоящее время является одним из самых эффективных методов повышения нефтедобычи [2, 3]. В результате ГРП повышается дебит добывающих или приемистость нагнетательных скважин, а также повышается конечная нефтеотдача за счет приобщения к выработке слабодренлируемых зон и пропластков.

Трещины, находящиеся в продуктивных коллекторах, в ряде случаев могут быть заполнены малопроницаемым материалом. В этом случае они имеют меньшую проницаемость, чем основная порода (т. н. завесы).

---

*Елена Валерьевна Андриянова, ассистент.*

*Владимир Иванович Астафьев (д.ф.-м.н., проф.), профессор кафедры «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений».*

В данной работе рассмотрены вопросы моделирования процесса фильтрации жидкости к скважине при наличии в пласте трещин (разломов) различной проницаемости, исследования влияния таких разломов на характер процесса фильтрации жидкости к добывающей скважине и на величину продуктивности такой скважины с высокопроницаемой/малопроницаемой трещиной/завесой.

### Постановка задачи и математическая модель

Рассмотрим процесс установившейся фильтрации несжимаемой жидкости к конечной системе вертикальных добывающих скважин в изотропном по проницаемости плоском горизонтальном пласте. В плоскости  $(x, y)$  данный процесс описывается уравнением несжимаемости и законом фильтрации Дарси:

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \vec{V} = -(k_0 / \mu) \operatorname{grad} p, \quad (1)$$

где  $\vec{V}(x, y)$  – вектор скорости фильтрации жидкости;  
 $p(x, y)$  – давление в жидкости;  
 $\mu$  – вязкость жидкости;  
 $k_0$  – проницаемость пласта мощностью  $h$ .

В данном пласте с круговым контуром питания радиуса  $R_c$  в точках  $M_k(x_k, y_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) расположены  $N$  добывающих скважин с одинаковым радиусом  $r_w$  и с дебитами  $Q_k$ . Кроме этого внутри контура питания расположена трещина длиной  $2l$ , толщиной  $2\delta$  ( $\delta \ll l$ ) и проницаемостью  $k_f$ . Трещина ориентирована вдоль оси  $x$ , а центр ее совпадает с началом координат плоскости  $(x, y)$ . Данная трещина моделирует присутствующую в пласте узкую протяженную неоднородность ( $\delta \ll l$ ), проницаемость в которой  $k_f$  отличается от проницаемости пласта  $k$  в ту или иную сторону (при малых значениях  $k_f$  данная несплошность представляет собой слабопроницаемую линзу (завесу), а при больших значениях  $k_f$  – высокопроницаемую каверну).

Комплексный потенциал данной задачи в комплексной переменной  $z = x + iy$  можно записать в виде [2]

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^N q_k \ln(z - z_k) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}, \quad (2)$$

где  $q_k = \mu Q_k / 2\pi k_0 h$  – приведенные дебиты добывающих скважин ( $k = 1, 2, \dots, N$ ),  $c_n$  – неизвестные коэффициенты в разложении в ряд Лорана возмущения, вызываемого наличием в пласте неоднородности и затухающего на бесконечности.

### Решение задачи

Для трещин гидроразрыва пласта (ГРП) с добывающей скважиной дебита  $Q$ , расположенной в начале координат, решение данной задачи строилось следующим образом [2]. Трещина аппроксимировалась эллипсом с полуосями  $l$  и  $\delta$ . Для описания течения жидкости внутри эллипса строился свой собственный комплексный потенциал

$$\varphi_f(z) = q_f \ln z + \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n, \quad (3)$$

где  $q_f = \mu Q / 2\pi k_f h$ ,  $d_n$  – неизвестные коэффициенты в разложении в ряд Лорана возмущения, ограниченного внутри трещины. Неизвестные коэффициенты  $c_n$  и  $d_n$  в представлении потенциалов в виде (2) и (3) находились из условий непрерывности давления  $p$  и нормальной компоненты вектора скорости  $V_n$  на границе «пласт – трещина».

Учитывая, что  $\delta \ll l$ , в работе [4] было предложено заменить эллипс с полуосями  $l$  и  $\delta$  прямолинейным разрезом нулевой толщины ( $-l < x < l, y = 0$ ). Процесс фильтрации жидкости в трещине (в предположении равенства давления на верхнем и нижнем берегах трещины) был смоделирован в виде следующего дополнительного граничного условия на разрезе:

$$F_{CD} \sqrt{1 - (x/l)^2} \operatorname{Re} \varphi'(x) = \operatorname{Im} \varphi(x), \quad (4)$$

где  $F_{CD} = k_f \delta / k_0 l$  – безразмерный коэффициент проводимости трещины [3].

Тогда, отобразив с помощью функции Жуковского  $z = l(v + v^{-1})/2$  внешность разреза  $-l < x < l, y = 0$  на внешность единичного круга  $|v| = 1$ , потенциал (2) в новой переменной  $v$  можно записать в виде

$$\varphi(v) = \sum_{k=1}^N q_k \ln(v - v_k) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n v^{-n}, \quad (5)$$

где  $lv(z) = z + \sqrt{z^2 - l^2}$ ,  $lv(z_k) = z_k + \sqrt{z_k^2 - l^2} = lv_k$ ,  $|v_k| > 1, (k=1, 2, \dots, N)$ ,

$C_n$  – новые неизвестные коэффициенты при разложении в ряд Лорана возмущения в переменной  $v$ , вызываемого наличием в пласте неоднородности и затухающего на бесконечности.

Граничное условие (4) на прямолинейном разрезе  $-l < x < l, y = 0$  в новой переменной  $v$  можно представить в следующем виде [5, 6]:

$$\operatorname{Im}(F_{CD} v \phi'(v) - \phi(v)) = 0, v = e^{i\theta}. \quad (6)$$

Более общее граничное условие, учитывающее возможность разрыва давления на верхнем и нижнем берегах разреза, а также случай криволинейных разрезов, было предложено в работах [7, 8], а результаты, вытекающие из этого нового граничного условия, будут обсуждены в последующих работах.

Итак, в случае одной добывающей скважины решение краевой задачи (6), найденное в работах [5, 6], имело следующий вид:

$$\varphi(v) = q_1 (\ln(v - v_1) + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \frac{nF_{CD} - 1}{nF_{CD} + 1} (\bar{v}_1 v)^{-n} + const). \quad (7)$$

Ряд в представлении (7) слабо сходится, поэтому его удобнее представить в виде

$$\varphi(v) = q_1 (\ln \frac{v - v_1}{1 - 1/\bar{v}_1 v} - 2 \sum_1^{\infty} \frac{(\bar{v}_1 v)^{-n}}{n(nF_{CD} + 1)} + const). \quad (8)$$

Учитывая, что  $\ln 2(z - z_1)/l = \ln(v - v_1) + \ln(1 - 1/\bar{v}_1 v)$ , потенциал (8) в переменной  $z$  можно записать в виде, удобном для построения линий тока и нахождения скин-фактора:

$$\phi(z) = q_1 (\ln \frac{z - z_1}{(1 - 1/\bar{v}_1 v(z))(1 - 1/\bar{v}_1 v(z))} - 2 \sum_1^{\infty} \frac{(\bar{v}_1 v(z))^{-n}}{n(nF_{CD} + 1)} + \ln \frac{2}{l} + const). \quad (9)$$

Характер течения жидкости к скважине при различных расположениях трещины и скважины и различных значениях коэффициента проводимости трещины  $F_{CD}$  изображен на рис. 1 и рис. 2.

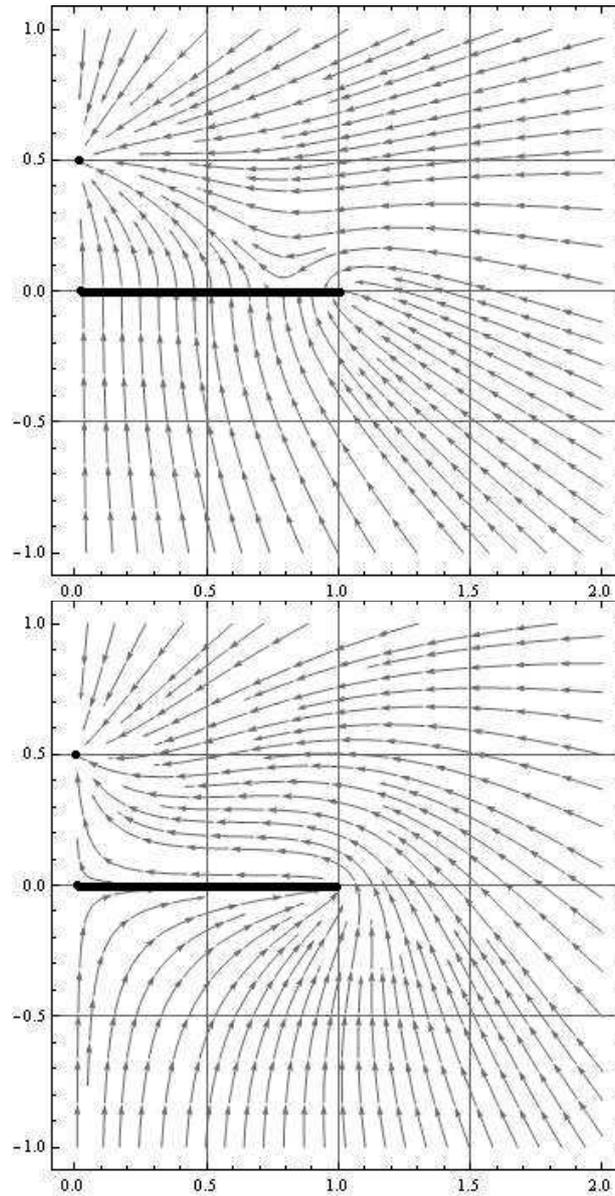


Рис. 1. Линии тока жидкости к скважине, расположенной в точке (0; 0,5) при значениях  $F_{CD}=\infty$  (слева) и  $F_{CD}=0$  (справа)

Обобщение приведенного решения на случай двух добывающих скважин с одинаковым дебитом ( $Q_2 = Q_1$ ), расположенных в точках  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2 = x_1 - iy_1$  симметрично относительно трещины, будет выглядеть следующим образом:

$$\varphi(v) = q_1 (\ln(v - v_1) + \ln(v - \bar{v}_1)) + 2 \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\theta_1}{n} \frac{nF_{CD} - 1}{nF_{CD} + 1} (\rho_1 v)^{-n} + const, \quad (10)$$

где  $v_1 = \rho_1 \exp(i\theta_1)$ .

Как и в случае одной добывающей скважины ряд в представлении (10) плохо сходится, поэтому аналогично представлению (8) представление (10) перепишем

в следующем виде:

$$\varphi(v) = q_1 \left( \ln \frac{v - v_1}{1 - 1/v_1 v} + \ln \frac{v - \bar{v}_1}{1 - 1/v_1 v} - 4 \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\theta_1 (\rho_1 v)^{-n}}{n(nF_{CD} + 1)} + const \right). \quad (11)$$

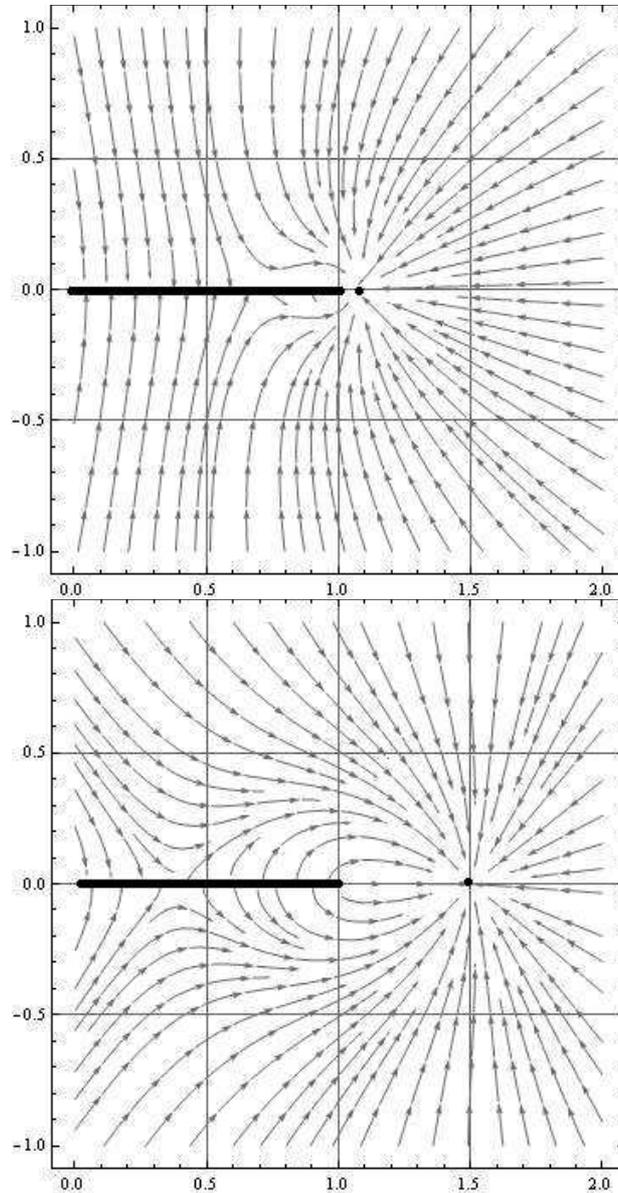


Рис. 2. Линии тока жидкости к скважине, расположенной в точке (1,05; 0) (слева) и (1,5; 0) (справа) при значении  $F_{CD} = \infty$

Так же как и в случае одной скважины, при построении линий тока или для нахождения скин-фактора в случае двух скважин необходимо, воспользовавшись соотношением  $\ln 2(z - z_1)/l = \ln(v - v_1) + \ln(1 - 1/v_1 v)$ , представить соотношения (11) в виде, аналогичном представлению (9):

$$\phi(z) = q_1(\ln(z - z_1)(z - \bar{z}_1) + 4F_{CD} \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\theta_1}{nF_{CD} + 1} (\rho_0 v(z))^{-n} + const). \quad (12)$$

Данный подход можно обобщить и на случай большего числа добывающих скважин.

Пусть в случае двух скважин одинакового дебита величина  $\rho_1 \rightarrow 1$ . Это соответствует случаю одной скважины удвоенного дебита, расположенной на трещине в точке  $(x_l, 0)$ , т. е. трещине ГРП, у которой правая часть имеет длину  $l - x_l$ , а левая часть длину  $l + x_l$ . Для нахождения точки  $x_l$  на трещине, где расположена скважина, нужно учесть, что  $lv_1 = z_1 + \sqrt{z_1^2 - l^2}$ . Из этого соотношения при  $\rho_1 \rightarrow 1$  следует, что  $x_l = l \cos \theta_l$ .

Потенциал (11) при  $\rho_1 \rightarrow 1$  будет иметь следующий вид:

$$\varphi(v) = 2q_1(\ln v - 2 \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\theta_1 v^{-n}}{n(nF_{CD} + 1)} + const). \quad (13)$$

В частности, при  $\theta_l = \pi/2$ , т. е. при  $x_l = 0$  (скважина в центре трещины длиной  $2l$ ) потенциал (13) примет вид

$$\varphi(v) = 2q_1(\ln v - \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n v^{-2n}}{n(2nF_{CD} + 1)} + const), \quad (14)$$

в то время как при  $\theta_l = 0$ , т. е. при  $x_l = l$  (скважина в правом конце трещины) потенциал (13) будет

$$\varphi(v) = 2q_1(\ln v - 2 \sum_1^{\infty} \frac{v^{-n}}{n(nF_{CD} + 1)} + const). \quad (15)$$

### Коэффициент продуктивности скважины

Основным фактором, характеризующим эффективность проведенного ГРП, является скин-фактор (определяется исключительно по результатам ГДИС) после ГТМ. Скин-фактор, определяемый при исследовании скважин, отражает любой физический или механический феномен, ограничивающий приток в скважину [9]. Впервые Van Everdingen A. F. и Hurst N. (1949) ввели понятие скин-эффекта для оценки состояния призабойной зоны скважины. Согласно авторам, изменение забойного давления в результате ухудшения или улучшения проницаемости пласта в околоскважинной области пропорционально скин-фактору. Таким образом, скин-фактор выражает величину дополнительного падения давления в результате отклонения от плоскорадиального течения [10]. В основном загрязнение призабойной зоны в процессе бурения вызывает уменьшение проницаемости вблизи скважины, однако в случае с ГРП проницаемость скин-зоны будет увеличена в результате создания высокопроводимой трещины в породе, поэтому значения скин-фактора будут отрицательные. Эффективность работы скважины выражается через безразмерный коэффициент продуктивности, обычно записываемый в виде [3]

$$J = \frac{q}{p_c - p_w} = \left( \ln \frac{R_c}{r_w} + S \right)^{-1}, \quad (16)$$

где  $p_c$  – давление на контуре питания;  
 $p_w$  – давление на забое скважины;

$R_c$  – радиус контура питания;

$r_w$  – радиус скважины;

$S$  – скин-фактор скважины.

В случае расположения одной скважины в пласте вне трещины определим из выражения (9) для потенциала  $\varphi(z)$  значения  $p_c$  и  $p_w$  из следующих условий:

$$p_c = \operatorname{Re} \varphi(z), z = z_c = z_1 + R_c e^{i\theta}, \quad p_w = \operatorname{Re} \varphi(z), z = z_w = z_1 + r_w e^{i\theta}. \quad (17)$$

Учитывая, что  $l/R_c \ll 1$ , т. е.  $lv(z_c) = z_c + \sqrt{z_c^2 - l^2} \approx 2z_c$ , из выражения (9) запишем величину  $p_c$  в виде

$$p_c = q_1 (\ln(2R_c / l) + \text{const}).$$

Аналогично, учитывая, что  $l/r_w \ll 1$ , т. е.  $lv(z_w) = z_w + \sqrt{z_w^2 - l^2} \approx lv_1$ , также из выражения (9) для величины  $p_w$  получим следующее выражение:

$$p_w = q_1 (\ln(2r_w / l) + \ln|1 - v_0^{-2}| + \ln(1 - \rho_0^{-2}) + 2 \sum_1^{\infty} \frac{\rho_0^{-2n}}{n(nF_{CD} + 1)} + \text{const}).$$

Следовательно, величину скин-фактора  $S = 1/J - \ln(R_c / r_w)$  можно записать как

$$S = \ln|1 - v_0^{-2}| + \ln(1 - \rho_0^{-2}) + 2 \sum_1^{\infty} \frac{\rho_0^{-2n}}{n(nF_{CD} + 1)}. \quad (18)$$

В частности, из представления (18) следует, что при  $\theta_0 = 0$  (см. рис. 2), когда  $v_0 = \rho_0$ , величина скин-фактора будет

$$S = 2 \ln(1 - \rho_0^{-2}) + 2 \sum_1^{\infty} \frac{\rho_0^{-2n}}{n(nF_{CD} + 1)} = -2F_{CD} \sum_1^{\infty} \frac{\rho_0^{-2n}}{nF_{CD} + 1} < 0, \quad (19)$$

а при  $\theta_0 = \pi/2$  (рис. 1), когда  $v_0 = i\rho_0$ , она примет следующее значение:

$$S = \ln(1 - \rho_0^{-4}) + 2 \sum_1^{\infty} \frac{\rho_0^{-2n}}{n(nF_{CD} + 1)}. \quad (20)$$

Из соотношения (18) также следует, что для непроницаемых трещин (завес), когда  $F_{CD} = 0$ , величина  $S$  будет

$$S = \ln|1 - v_0^{-2}| - \ln(1 - \rho_0^{-2}), \quad (21)$$

а в высокопроницаемом случае, когда  $F_{CD} = \infty$ , она примет значение

$$S = \ln|1 - v_0^{-2}| + \ln(1 - \rho_0^{-2}) < 0. \quad (22)$$

### Заключение

В работе дана постановка и решена задача о фильтрации жидкости к скважине при трещине различной проводимости  $F_{CD}$ . Для различных значений  $F_{CD}$  и различных расположений скважины и трещины исследован характер течения жидкости к скважине, построены линии тока, а также определен скин-фактор скважины, определяющий величину дополнительного перепада давления в результате отклонения течения от плоскорадиального из-за наличия трещины.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фазлыев Р.Т. Площадное заводнение нефтяных месторождений. – М.-Ижевск: ИКИ, 2008. – 256 с.
2. Каневская Р.Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. – М.: Недра, 1999. – 212 с.
3. Экономидес М., Олини Р., Валко П. Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта: от теории

- к практике. – М.-Ижевск: ИКИ, 2007. – 236 с.
4. Астафьев В.И., Федорченко Г.Д. Моделирование фильтрации жидкости при наличии трещины гидравлического разрыва пласта // Вестник Самарского государственного университета. Сер. Физ.-мат. науки. – 2007. – № 2 (15). – С. 128-132.
  5. Астафьев В.И., Каримов Н.А., Федорченко Г.Д. Влияние разломов пласта на характер процесса фильтрации жидкости к добывающей скважине // Труды XVI Международного симпозиума МДОЗМФ-2013, Харьков – Херсон, 10-15 июня 2013. – С. 53-56.
  6. Каримов Н.А. Влияние разломов пласта на характер процесса фильтрации жидкости к добывающей скважине // Вестник Самарского государственного университета. – 2013. – № 9/2 (110). – С. 191-195.
  7. Андрианова Е.В. Моделирование процесса фильтрации жидкости к скважине при наличии несплошностей в пласте // Математическое моделирование в естественных науках: Материалы XXIII Всероссийской школы-конференции молодых ученых и студентов – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2014. – С. 20-23.
  8. Astafiev V., Andriyanova E. 2015. Influence of reservoir's discontinuities on the process of oil filtration to the production well. New Geotechnology for the Old Oil Provinces. 23-27 March 2015. Tyumen, Russia. – DOI: 10.3997/2214-4609.201412034.
  9. Мукерджи Х. Производительность скважин. – Москва, 2001. – 183 с.
  10. Michael J. Economides, A. Daniel Hill, Christine Ehlig. Petroleum production systems. – Economides, 1994 by Prentice Hall PTR. – 609 p.

*Статья поступила в редакцию 27 мая 2015 г.*

## **THE INFLUENCE OF RESERVOIR PERMEABILITY HETEROGENEITY ON FILTRATION OF RESERVOIR FLUID TO PRODUCTION WELLS**

*E.V. Andriyanova, V.I. Astafiev*

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

*The steady-state flow process of incompressible fluid to the system of production wells in horizontal reservoir of constant height and permeability is considered in this paper. There is a thin area in the reservoir with constant permeability  $k_f$ , which models highly permeable cracks or low permeability barrier. The characteristic of filtration process for various  $k_f$  value is studied, well productivity index and the analytical expression for skin are defined.*

**Keywords:** *fluid filtration, highly permeable cracks, low permeability barriers, well productivity index, skin.*

---

*Elena V. Andriyanova, Assistant.  
Vladimir I. Astafiev (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.*