

УДК 536. 2 (075)

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ*

А.В. Еремин, И.В. Кудинов, Л.С. Абишева, В.В. Жуков

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: totig@yandex.ru

С использованием интегрального метода теплового баланса разработан метод получения аналитического решения задачи теплообмена для движущейся в цилиндрическом канале жидкости при граничных условиях первого рода на стенках трубы. В основу метода положено использование дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий, определяемых так, чтобы искомое решение удовлетворяло исходному дифференциальному уравнению в граничных точках. Дополнительная искомая функция представляет изменение температуры в центре трубы в зависимости от величины продольной переменной. Ввиду бесконечной скорости распространения теплоты, описываемой параболическим уравнением теплообмена, температура в центре канала будет изменяться тотчас же после приложения граничного условия первого рода на поверхности цилиндрического канала. Следовательно, область ее изменения включает весь диапазон изменения температуры $0 \leq \Theta \leq 1$ и продольной пространственной переменной $0 \leq x < \infty$. Такой подход позволяет свести решение дифференциального уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного уравнения относительно дополнительной искомой функции, зависящей лишь от продольной пространственной переменной. Показано, что благодаря использованию дополнительных граничных условий с увеличением числа приближений искомого решения исходное дифференциальное уравнение удовлетворяется не только на границах области, но и внутри нее.

Ключевые слова: задача теплообмена, ламинарное течение жидкости, бесконечная скорость распространения теплоты, интегральный метод теплового баланса, приближенное аналитическое решение, дополнительная искомая функция, дополнительные граничные условия, координатные функции.

Задача теплообмена при ламинарном течении жидкости в цилиндрическом канале (рис. 1) впервые была решена Гретцем и независимо от него Нуссельтом. Уточненное решение задачи Гретца – Нуссельта дано в [1, 2]. Отметим, что это решение представляет бесконечный функциональный ряд, плохо сходящийся при

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания ФГБОУ ВПО «СамГТУ» (код проекта 1273).

Антон Владимирович Еремин (к.т.н.), доцент кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика».

Игорь Васильевич Кудинов (к.т.н.), доцент кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика».

Любовь Сергеевна Абишева, ассистент, доцент кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика».

Виталий Владимирович Жуков, аспирант.

малых значениях продольной координаты ($x < 0,01$). Кроме того, решение содержит функции Бесселя различного (в том числе и дробного) порядка. Такое решение малоприспособно для инженерных приложений.

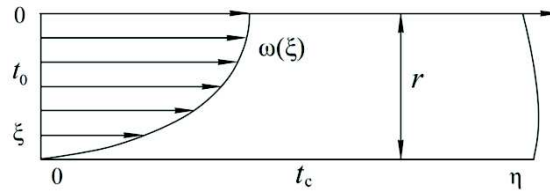


Рис. 1. Схема стабилизированного ламинарного течения жидкости в круглой трубе

Математическая постановка задачи Гретца – Нуссельта для цилиндрического канала имеет вид [1, 2] (см. рис. 1)

$$\omega(\xi) \frac{\partial t(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{a}{\xi} \frac{\partial t(\xi, \eta)}{\partial \xi} + a \frac{\partial^2 t(\xi, \eta)}{\partial \xi^2}; \quad (\eta \geq 0; \quad 0 \leq \xi \leq r); \quad (1)$$

$$t(\xi, 0) = t_0; \quad (2)$$

$$t(r, \eta) = t_c; \quad (3)$$

$$\frac{\partial t(0, \eta)}{\partial \xi} = 0, \quad (4)$$

где t – температура;
 η, ξ – продольная и поперечная координаты;
 r – радиус трубы;
 t_0 – температура жидкости на входе в трубу (при $\eta = 0$);
 $t_{\bar{n}}$ – температура стенки (при $\xi = r$);
 a – коэффициент теплопроводности;
 $\omega(\xi)$ – функция, описывающая распределение скорости по поперечной координате.

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta = \frac{t - t_0}{t_{\bar{n}} - t_0}; \quad y = \frac{\xi}{r}; \quad x = \frac{1}{2} \frac{\eta}{Pe r}; \quad Pe = \frac{\omega_{cp} r}{a}, \quad (5)$$

где Θ – относительная избыточная температура;
 y – безразмерная поперечная координата;
 $\bar{\delta}$ – безразмерная продольная координата;
 Pe – число Пекле.

С учетом принятых обозначений задача (1) – (4) будет (рис. 2):

$$y(1 - y^2) \frac{\partial \Theta(y, x)}{\partial x} - \frac{\partial \Theta(y, x)}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \Theta(y, x)}{\partial y^2} = 0; \quad (x \geq 0; \quad 0 \leq y \leq 1); \quad (6)$$

$$\Theta(y, 0) = 0; \quad (7)$$

$$\Theta(1, x) = 1; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, x)}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

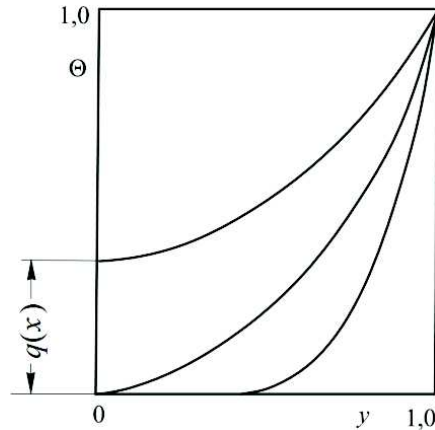


Рис. 2. Схема теплообмена при течении жидкости в цилиндрическом канале

Рассмотрим приближенный аналитический метод решения указанной задачи, основанный на использовании дополнительных граничных условий. С целью упрощения процесса получения решения введем дополнительную искомую функцию

$$q(x) = \Theta(0, x), \quad (10)$$

описывающую изменение температуры в центре трубы. Стоит отметить, что ввиду бесконечной скорости распространения теплоты, заложенной в параболическом уравнении (6), температура жидкости в центре трубы будет изменяться тотчас же после начала действия граничного условия (8). Следовательно, диапазон изменения функции $q(x)$ включает весь диапазон изменения пространственной переменной $0 \leq x < \infty$.

Решение задачи (6) – (9) разыскивается в виде

$$\Theta(y, x) = \sum_{k=1}^n b_k(q) \varphi_k(y), \quad (11)$$

где $b_k(q)$ – неизвестные коэффициенты, зависящие от $q(x)$;

$\varphi_k(y) = y^{k-1}$ – координатные функции ($k = 1, \dots, n$).

Для нахождения $b_k(q)$ будем использовать основные (8), (9) и дополнительные граничные условия, определяемые в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением (1) было эквивалентно выполнению уравнения (6) в граничных точках $y = 0$ и $y = 1$ [3 – 6].

Для получения решения задачи (6) – (9) в первом приближении подставим (11), ограничиваясь тремя членами ряда, в (8), (9), (10). Относительно неизвестных коэффициентов $b_k(q)$ получим систему трех линейных алгебраических уравнений, из решения которой находим

$$b_1 = q(x), \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 1 - q(x). \quad (12)$$

С учетом (12) соотношение (11) примет вид

$$\Theta(y, x) = q(x) + (1 - q(x))y^2. \quad (13)$$

Потребуем, чтобы соотношение (13) удовлетворяло осредненному уравнению (6), то есть интегралу теплового баланса вида

$$\int_0^1 \left[y(1-y^2) \frac{\partial \Theta(y, x)}{\partial x} - \frac{\partial \Theta(y, x)}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \Theta(y, x)}{\partial y^2} \right] dy = 0. \quad (14)$$

Подставляя (13) в (14), после вычисления интегралов относительно $q(x)$ будем иметь следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$2 \frac{dq(x)}{dx} + 24q(x) - 24 = 0. \quad (15)$$

Интегрируя уравнение (15), находим

$$q(x) = 1 + C \exp(-12x), \quad (16)$$

где C – постоянная интегрирования.

Подставляя (16) в (13), получаем

$$\Theta(y, x) = 1 + C e^{-12x} (1 - y^2). \quad (17)$$

Для определения постоянной интегрирования C составим невязку граничного условия (7) и потребуем ортогональности невязки к первой координатной функции $\varphi_1 = 1$:

$$\int_0^1 1 + C(1 - y^2) dy = 0.$$

Определяя интегралы, находим $C = -1,5$.

Соотношение (13) с учетом найденного значения постоянной интегрирования принимает вид

$$\Theta(y, x) = 1 - 1,5 e^{-12x} (1 - y^2). \quad (18)$$

Результаты расчетов по формуле (18) в сравнении с точным решением приведены на рис. 3.

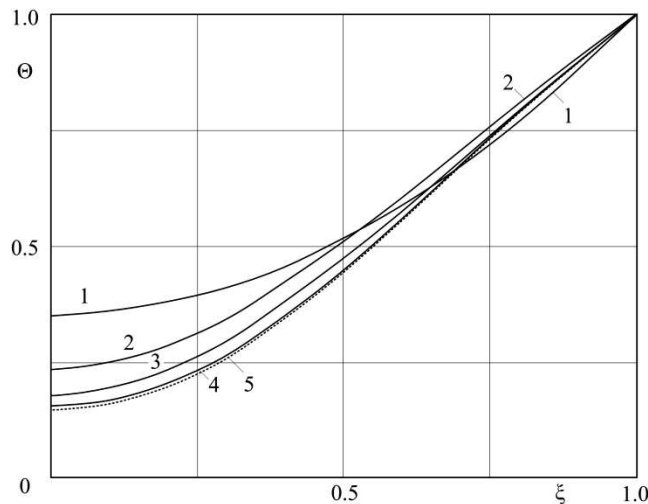


Рис. 3. Распределение безразмерной температуры ($x = 0,07$):
1, 2, 3, 4 – первое, второе, третье и четвертое приближения соответственно; 5 – точное решение

Для повышения точности найдем решение задачи (6) – (9) во втором приближении. При этом используются шесть членов ряда (11). Неизвестные коэффициенты $b_k(q)$ определяются из условий (8), (9), (10) и дополнительных гра-

ничных условий. Согласно методу [5] для получения решения задачи (6) – (9) во втором и последующих приближениях всякий раз необходимо добавлять три дополнительных граничных условия, причем два из них записываются применительно к точке $y = 0$ и одно – к точке $y = 1$.

Записывая уравнение (6) для точки $y = 1$, получаем первое дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, x)}{\partial y^2} + \frac{\partial \Theta(1, x)}{\partial y} = 0. \quad (19)$$

Уравнение (6) в точке $y = 0$ совпадает с граничным условием (9), которое искомым решением удовлетворяется в любом приближении.

Для получения второго дополнительного граничного условия продифференцируем уравнение (6) по переменной y и запишем полученное соотношение применительно к точке $y = 0$:

$$\frac{\partial \Theta(0, x)}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 \Theta(0, x)}{\partial y^2} = 0. \quad (20)$$

Дифференцируя (10) по переменной x , получаем

$$\frac{\partial q(x)}{\partial x} = \frac{\partial \Theta(0, x)}{\partial x}. \quad (21)$$

Сравнивая (20) и (21), получаем второе дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial q(x)}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 \Theta(0, x)}{\partial y^2} = 0. \quad (22)$$

Для нахождения третьего дополнительного граничного условия дважды продифференцируем уравнение (6) по переменной y и запишем полученное соотношение для точки $y = 0$:

$$2 \frac{\partial^2 \Theta(0, x)}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^3 \Theta(0, x)}{\partial y^3} = 0. \quad (23)$$

Дифференцируя (9) по переменной x и сравнивая полученное соотношение с (23), получаем третье дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^3 \Theta(0, y)}{\partial x^3} = 0. \quad (24)$$

Таким образом, многократно дифференцируя уравнение (6) по переменной y и сравнивая получаемые соотношения с основными и полученными ранее дополнительными граничными условиями, продифференцированными по переменной x , можно найти любое число дополнительных граничных условий. Четвертое, пятое и шестое условия соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Theta(1, x)}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^2 \Theta(1, x)}{\partial y^2} &= 0; \\ \frac{3}{2} \frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial q(x)}{\partial x} - 4 \frac{\partial^4 \Theta(0, x)}{\partial y^4} &= 0; \quad \frac{\partial^5 \Theta(0, x)}{\partial y^5} = 0. \end{aligned}$$

Для получения решения во втором приближении, подставляя (11) (ограничиваясь шестью членами ряда) в (8), (9), (10), (19), (22), (24), относительно $b_k(q)$ получим систему шести линейных алгебраических уравнений, из решения кото-

рой находим

$$b_1 = q(x), b_2 = 0, b_3 = \frac{1}{4} \frac{dq(x)}{dx}, b_4 = 0, \\ b_5 = \frac{25}{9} + \frac{25q(x)}{9} - \frac{7}{12} \frac{dq(x)}{dx}, b_6 = \frac{16}{9} + \frac{16q(x)}{9} + \frac{1}{3} \frac{dq(x)}{dx}. \quad (25)$$

Соотношение (11) с учетом (25) будет

$$\Theta(y, x) = q(x) + \left(\frac{1}{4} \frac{dq(x)}{dx} \right) y^2 + \left(\frac{25}{9} + \frac{25q(x)}{9} - \frac{7}{12} \frac{dq(x)}{dx} \right) y^4 + \\ + \left(\frac{16q(x)}{9} - \frac{16}{9} + \frac{1}{3} \frac{dq(x)}{dx} \right) y^5. \quad (26)$$

Подставляя (26) в (14), после вычисления интегралов относительно $q(x)$ будем иметь следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$129 \frac{d^2 q(x)}{dx^2} + 6484 \frac{dq(x)}{dx} + 40320q(x) - 40320 = 0. \quad (27)$$

Интегрируя уравнение (27), находим

$$q(x) = 1 + C_1 \exp(-7,2699x) + C_2 \exp(-42,9937x), \quad (28)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования. Для их определения составляется невязка граничного условия (7) и требуется ортогональность невязки к координатным функциям $\varphi_1 = 1$ и $\varphi_2(y) = y$:

$$\begin{cases} \int_0^1 \Theta(y, 0) dy = 0, \\ \int_0^1 \Theta(y, 0) y dy = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Подставляя (26) (с учетом (28)) в (29), относительно C_1 и C_2 будем иметь систему двух алгебраических линейных уравнений, из решения которой находим

$$C_1 = 0,83755, C_2 = -1,4161. \quad (30)$$

После определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 решение задачи (6) – (9) во втором приближении находится из (26). Соотношение (26) точно удовлетворяет основным (8), (9) и дополнительным (10), (19), (22), (24) граничным условиям, а также интегралу теплового баланса (14) и приближенно (во втором приближении) – уравнению (6) и граничному условию (7).

Результаты расчетов безразмерной температуры во втором приближении в сравнении с точным решением представлены на рис. 3. Из их анализа следует, что расхождение результатов не превышает 6 %.

На рис. 3 приведены графики изменения температуры в первом, втором, третьем и четвертом приближениях при $x = 0,07$ в сравнении с точным решением. Из их анализа следует, что расхождение результатов в четвертом приближении не превышает 1 %. Таким образом, с увеличением числа приближений получаемое решение существенно уточняется, что свидетельствует о сходимости предлагаемого метода решения задачи (6) – (9).

Выводы

1. С использованием дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий в интегральном методе теплового баланса получено приближенное аналитическое решение задачи теплообмена в жидкости, движущейся в цилиндрическом канале (задача Гретца – Нуссельта). Введение дополнительной искомой функции обосновывается бесконечной скоростью распространения теплоты, описываемой параболическим уравнением теплообмена. Область ее изменения, так же как и область изменения основной искомой функции $\Theta(y, x)$, включает весь диапазон изменения температуры $0 \leq \Theta(0, x) \leq 1$ и весь диапазон продольной пространственной переменной $0 \leq x < \infty$.

2. Дополнительные граничные условия находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению исходного дифференциального уравнения в граничных точках $y = 0$ и $y = 1$. Показано, что выполнение дифференциального уравнения на границах области с увеличением числа приближений приводит к его выполнению и внутри нее с точностью, зависящей от числа приближений.

3. Метод получения решения, основанный на использовании дополнительной искомой функции в интегральном методе теплового баланса, позволяет свести решение дифференциального уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения, что оказывается возможным благодаря использованию интеграла теплового баланса. То есть в данном случае требуется выполнение не исходного дифференциального уравнения, а этого же уравнения, осредненного по поперечной пространственной переменной. Такой метод позволяет находить решения краевых задач со сложными дифференциальными операторами в уравнениях (нелинейных, с переменными коэффициентами и др.), получение решений которых с помощью классических аналитических методов либо затруднительно, либо вообще не представляется возможным.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. – М.: Энергия, 1967. – 412 с.
2. Цой П.В. Системные методы расчета краевых задач тепломассопереноса. – М.: Изд-во МЭИ, 2005. – 568 с.
3. Кудинов В.А., Стефанюк Е.В., Антимонов М.С. Аналитические решения задач теплообмена при течении жидкости в плоскопараллельных каналах на основе определения фронта температурного возмущения // Инженерно-физический журнал. – 2007. – Т. 80. – № 5. – С. 176-186.
4. Стефанюк Е.В., Кудинов И.В., Ларгина Е.В. Построение приближенных аналитических решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на основе использования дополнительных граничных условий // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (18). – С. 122-132.
5. Стефанюк Е.В., Кудинов В.А. Дополнительные граничные условия в нестационарных задачах теплопроводности // Теплофизика высоких температур. – 2009. – Т. 47. – № 2. – С. 269-282.
6. Еремин А.В., Стефанюк Е.В., Рассыпнов А.Ю., Кузнецова А.Э. Нестационарный теплообмен в цилиндрическом канале при ламинарном течении жидкости // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. – 2013. – № 4. – С. 122-130.

Статья поступила в редакцию 5 октября 2015 г.

THE RESEARCH OF THE HEAT-TRANSFER DURING THE FLOWING OF LIQUID IN A CYLINDRICAL CHANNEL

A.V. Eremin, I.V. Kudinov, L.S. Abisheva, V.V. Zhukov

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia

Using the integral method of heatbalance, was developed a method of analytically solving the problem of heat-transfer for liquid flowing in a cylindrical channel under first-type boundary conditions on the pipe walls. This method is based on the use of an additional sought-for function and additional boundary conditionsdetermined in such a way that the sought-for function would satisfy the original differential equation in the boundary points. The additional sought-for function shows the temperature changing in the centre of the pipe as depending on the longitudinal variable. Because of the heat-propagation infinite speed described by a parabolic equation of heat-conduction, the temperature in the channel centrewould change immediately after the application of first-type boundary conditions onthe cylindrical channel surfaces. Therefore, the region of the additional sought-for function change includes the entire temperature and longitudinal spatial-variable change range. This approach allows the solution of partial-derivatives differential equation to be reduced to the integration of an ordinary differential equation with respect to the additional sought-for function only depending on the longitudinal variable. The paper shows that, through the use of the additional sought-for function and additional boundary conditions, and with the increasing number of the sought-for solution approximations, the original equation would be satisfied not only at the region boundaries (via the implementation of the additional boundary conditions), but also inside that region.

Keywords: *heat-transfer problem, laminar flow of a liquid, infinite speed of heat propagation, integral method of thermal balance, approximate analytical solution, additional required function, additional boundary conditions, coordinate functions.*

*Anton V. Eremin (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.
Igor V. Kudinov (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.
Lyubov S. Abisheva, Assistant.
Vitaly V. Zhukov, Assistant.*