УДК 62-83

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ ПОЗИЦИОННОЙ СИСТЕМОЙ

В.П. Курган, А.А. Панкин

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: kurganvp@yandex.ru, pankinaa@yandex.ru

Определяются оптимальные законы изменения тока и скорости электромеханической позиционной системы, при которых обеспечивается при заданном перемещении (производительности) и заданных тепловых потерях минимальное время перемещения (максимум быстродействия). В результате получена формула минимального времени отработки заданного перемещения позиционной системой. Практически реализовать полученные экстремали тока якоря и скорости при кратковременном режиме работы позиционного электропривода можно применяя высокомоментные двигатели постоянного тока, которые регулируются управляемыми преобразователями с регулируемым токоограничением.

Ключевые слова: *регулируемое токоограничение, высокомоментные двигатели, позиционный электропривод, оптимальный закон, минимальное время перемещения.*

В настоящее время широко распространен способ управления позиционным электроприводом, при котором минимизируется время перемещения рабочего органа позиционной следящей системы. Наилучшей по быстродействию считается прямоугольная диаграмма тока якоря ее электропривода с двигателем постоянного тока и треугольная диаграмма скорости, представленные на рис. 1 соответствующими графиками I_d и ω [1, 2, 3].

Однако пользуясь методами вариационного исчисления [4], можно при тех же допущениях определить экстремали для тока якоря I_d и угловой скорости ω при заданных тепловых потерях в исполнительном двигателе Q_c и заданной величине углового перемещения рабочего органа Θ_k, решая задачу оптимального управления на минимальное время отработки заданного перемещения, в результате которого достигается максимальное быстродействие позиционного электропривода. Определим его.

Пусть имеем основное уравнение движения электропривода

$$j\frac{d\omega}{dt} = k\Phi \cdot I_d - M_c,$$

где j – момент инерции;
k – конструктивный коэффициент;
M_c – момент сопротивления.

Владимир Павлович Курган (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Электропривод и промышленная автоматика».
Алексей Александрович Панкин, старший преподаватель.

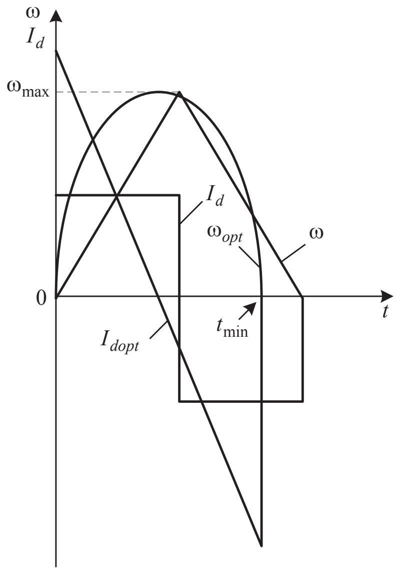

Рис. 1. Диаграммы тока и скорости позиционного электропривода постоянного тока

Введем допущения: магнитный поток $\Phi = const$; скорость идеального холостого хода $\omega_0 = const$; момент короткого замыкания $M_k = const$; ток короткого замыкания $I_k = const$, где $\omega_0 = \dfrac{U_d}{k\Phi}$; $M_k = k\Phi \cdot I_k$; U_d – напряжение на якоре.

Умножим основное уравнение движения на $\dfrac{\omega_0}{M_k}$; тогда, преобразуя его, получим

$$T_M \frac{d\omega}{dt} = \omega_0 \frac{I_d}{I_k} - \frac{M_c}{M_k}\omega_0, \qquad (1)$$

так как $j\dfrac{\omega_0}{M_k} = T_M$, где T_M – электромеханическая постоянная времени двигателя.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{d\dfrac{\omega}{\omega_0}}{d\dfrac{t}{T_M}} = \frac{I_d}{I_k} - \frac{M_c}{M_k}.$$

Обозначим: $\dfrac{\omega}{\omega_0} = \nu$; $\dfrac{I_d}{I_k} = i$; $\dfrac{M_c}{M_k} = \mu$; $\dfrac{t}{T_M} = \tau$,

тогда уравнение движения электропривода (1) в относительных единицах запишется в виде

$$\frac{d\nu}{d\tau} = i - \mu. \qquad (2)$$

В относительных единицах заданное перемещение α_c и тепловые потери q_c соответственно

$$\alpha_c = \int_0^{\tau_c} \nu(\tau) d\tau; \qquad (3)$$

$$q_c = \int_0^{\tau_c} i^2 d\tau. \qquad (4)$$

При этом необходимо найти минимум функционала

$$J = \tau_{\min} = \int_0^{\tau_c} d\tau \,. \qquad (5)$$

Таким образом, требуется найти такой закон управления током якоря во времени $i(\tau)$, чтобы для объекта управления (2) при заданном перемещении исполнительного механизма (3) и заданных тепловых потерях в якоре двигателя (4) обеспечивался минимум критерия J по (5), то есть достигалось максимальное быстродействие электропривода.

Выразим из (2) ток i:

$$i = \nu' + \mu. \qquad (6)$$

Подставим (6) в (4):

$$q_c = \int_0^{\tau_c} (\nu' + \mu)^2 d\tau. \qquad (7)$$

При этом искомой экстремалью будет не $i(\tau)$, а $\nu(\tau)$.

Данная задача является классической задачей на условный экстремум, причем со смешанными ограничениями, где уравнение (2) – это условие типа дифференциальной связи, что относит ее к изопериметрической задаче по методу Лагранжа. Применим эту методику [1, 2, 3].

Составим функцию Лагранжа:

$$L(\nu, \nu', \lambda) = 1 + \lambda_1 \nu + \lambda_2 (\nu' + \mu)^2. \qquad (8)$$

Составим уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial L}{\partial \nu} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \nu'}\right) = 0; \qquad (9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \nu} = \lambda_1; \qquad (10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \nu'} = 2\lambda_2 (\nu' + \mu);$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \nu'}\right) = 2\lambda_2 \nu''. \qquad (11)$$

Подставим (10) и (11) в (9):

$$\frac{d^2\nu}{d\tau^2} = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} = \lambda,$$

отсюда, интегрируя, получим

$$\frac{d\nu}{d\tau} = \lambda\tau + C_1; \qquad (12)$$

$$\nu(\tau) = \frac{\lambda}{2}\tau^2 + C_1\tau + C_2. \tag{13}$$

Для определения λ, C_1 и C_2 используем соотношения (3) и (4) и краевые условия задачи для двух концов траектории. Для позиционной системы управления положим, что

$$\begin{cases} \nu(0) = \nu_0 \text{ при } \tau = 0; \\ \nu(\tau_c) = \nu_k \text{ при } \tau = \tau_c. \end{cases} \tag{14}$$

Подставим (13) в (3):

$$\alpha_c = \int_0^{\tau_c} \nu(\tau)d\tau = \frac{\lambda}{6}\tau_c^3 + \frac{C_1}{2}\tau_c^2 + C_2\tau_c. \tag{15}$$

Положим для простоты в (7) $\mu = 0$ и подставим в него (12):

$$q_c = \int_0^{\tau_c} \nu'^2 d\tau = \int_0^{\tau_c} (\lambda\tau + C_1)^2 d\tau = \int_0^{\tau_c} (\lambda^2\tau^2 + 2\lambda\tau C_1 + C_1^2)d\tau =$$

$$= \frac{\lambda^2}{3}\tau_c^3 + \lambda C_1\tau_c^2 + C_1^2\tau_c. \tag{16}$$

Подставим (14) в (13), тогда получим

$$\nu(\tau_c) = \nu_k = \frac{\lambda}{2}\tau_c^2 + C_1\tau_c + C_2. \tag{17}$$

При нулевых граничных условиях, когда $\nu_0 = \nu_k = 0$, из (13) получим

$$C_2 = 0, \tag{18}$$

а из выражения (17)

$$C_1 = -\frac{\lambda}{2}\tau_c. \tag{19}$$

Подставим (18) и (19) в (15) $\frac{\lambda}{6}\tau_ц^3 - \frac{\lambda}{4}\tau_ц^3 = \alpha_ц$, откуда

$$\lambda = -\frac{12\alpha_c}{\tau_c^3}. \tag{20}$$

Подставим (19) в (16):

$$\frac{\lambda^2}{3}\tau_c^3 - \frac{\lambda^2}{2}\tau_c^3 + \frac{\lambda^2}{4}\tau_c^3 = q_c,$$

откуда

$$\lambda^2\frac{\tau_c^3}{12} = q_c. \tag{21}$$

Подставим (20) в (21), тогда получим

$$\tau_c = \sqrt[3]{\frac{12\alpha_c^2}{q_\text{c}}}. \tag{22}$$

Подставим (18), (19) и (20) в (13):

$$\nu(\tau)=\frac{q_{\text{c}}}{2\alpha_{\text{c}}}\left(\sqrt[3]{\frac{12\alpha_c^2}{q_{\text{c}}}}\tau-\tau^2\right). \qquad (23)$$

С учетом (6) при $\mu=0$ продифференцируем (23), тогда получим

$$i(\tau)=\nu'(\tau)=\frac{q_{\text{c}}}{2\alpha_{\text{c}}}\left(\sqrt[3]{\frac{12\alpha_c^2}{q_{\text{c}}}}-2\tau\right). \qquad (24)$$

Подставляем (22) в (5) получаем, что минимум функционала равен

$$\tau_{\min}=\sqrt[3]{\frac{12\alpha_c^2}{q_{\text{c}}}}. \qquad (25)$$

Т. е. это минимальное время отработки заданного перемещения при заданных тепловых потерях в якоре двигателя.

Переведем формулы (23), (24) и (25) из относительных единиц. Тогда оптимальный закон регулирования скорости двигателя имеет вид

$$\omega_{opt}(t)=\frac{Q_{\text{c}}\omega_0^2R_{\text{d}}}{2\Theta_kU_{dn}^2T_M^2}\left(\sqrt[3]{\frac{12\Theta_k^2U_{dn}^2T_M^2}{\omega_0^2Q_{\text{c}}R_{\text{d}}}}t-t^2\right);$$

при оптимальном законе изменения тока якоря

$$I_{dopt}(t)=I_k\,\frac{Q_{\text{c}}\omega_0^2R_{\text{d}}}{2\Theta_kU_{dn}^2T_M}\left(\sqrt[3]{\frac{12\Theta_k^2U_{dn}^2T_M^2}{\omega_0^2Q_{\text{c}}R_{\text{d}}}}t-2t\right).$$

Соответствующие графики ω_{opt} и I_{dopt} представлены на рис. 1.

В результате получим формулу минимального времени отработки заданного перемещения при заданных тепловых потерях в якоре двигателя

$$t_{\min}=T_M\sqrt[3]{\frac{12\Theta_k^2U_{dn}^2}{\omega_0^2Q_{\text{c}}R_{\text{d}}T_M}},$$

где U_{dn} – номинальное напряжение на якоре двигателя.

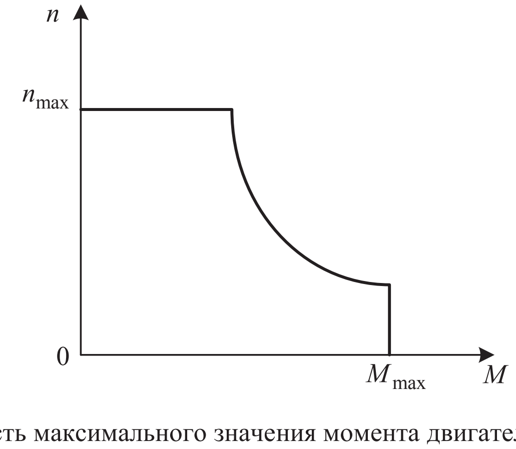

Рис. 2. Зависимость максимального значения момента двигателя от скорости

Известно [5], что высокомоментные двигатели постоянного тока имеют нелинейную характеристику максимального допустимого тока якоря от скорости, позволяющую на малых скоростях иметь значительно большую перегрузочную способность по току, чем на максимальной скорости. Соответствующая зависимость максимального момента (тока) двигателя от скорости представлена на рис. 2 [5].

Это позволяет практически реализовать полученные выше экстремали тока якоря и скорости при кратковременном режиме работы позиционного электропривода, применяя управляемые электроприводы постоянного тока с блоками нелинейного токоограничения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сабинин Ю.А.* Позиционные и следящие электромеханические системы: Учеб. пособие для вузов. – СПб.: Энергоатомиздат; Санкт-Петербургское отд-е, 2001. – 208 с.: ил.
2. *Ключев В.И.* Теория электропривода: Учеб. для вузов.— 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 2001. – 704 с.: ил.
3. *Ильинский Н.Ф.* Основы электропривода: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МЭИ, 2003. – 141 с.: ил.
4. *Петров Ю.П.* Вариационные методы теории оптимального управления. – Л., 1977. – 280 с.: ил.
5. *Усынин Ю.С.* Системы управления электроприводов: Учеб. пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2004. – 328 с.

Статья поступила в редакцию 2 февраля 2016 г.

THE MINIMUM TIME CONTROL OF ELECTROMECHANICAL POSITIONAL SYSTEM

V.P. Kurgan, A.A. Pankin

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

The optimal laws of current change and speed of electromechanical positional system which provide minimum movement time for a demand movement and demand heat losses are defined in this article. The result is the formula for the time minimum during which the positional system performs the demand movement. The obtained armature current and speed extremals of positional electro drive in short-time duty can be implemented by using of high-torque direct current motors which are regulated by controlled converter with adjustable current-limit.

Keywords: *adjustable current-limit, high-torque motors, positional electro drive, optimal law, minimum movement time.*

Vladimir P. Kurgan (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor
Alexey A. Pankin, Senior Lecturer.