

УДК 681.51

ИДЕНТИФИКАТОР СОСТОЯНИЯ ЦИФРОВОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА

И.С. Левин

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: levin_ilja@yahoo.com

Рассмотрена задача построения идентификатора состояния в оптимальной по быстродействию замкнутой системе управления процессом индукционного нагрева цилиндрических слитков, описываемая нелинейным неоднородным уравнением теплопроводности. Использовалась цифровая модель процесса, разработанная во FLUX. Предлагаемая процедура идентификации в условиях параметрической неопределенности характеристик объекта базируется на разработанной ранее методике аналитического синтеза безынерционного наблюдателя состояния объектов с распределенными параметрами, описываемых линейными пространственно одномерными уравнениями в частных производных параболического типа.

Ключевые слова: система с распределенными параметрами, индукционный нагрев, управление в условиях интервальной неопределенности, наблюдатель состояния.

В работе предлагается метод решения задачи проектирования идентификатора состояния нелинейной модели объекта с распределенными параметрами, в качестве которого рассматривается процесс индукционного нагрева. Методика решения подобной задачи для линейных моделей представлена в [1]. Далее рассматривается распространение данного метода на сложные, нелинейные цифровые модели объекта.

Процесс индукционного нагрева металлических заготовок цилиндрической формы с сосредоточенным управляющим воздействием по мощности внутреннего тепловыделения $u(t)$ можно описать следующим двумерным неоднородным уравнением теплопроводности [2]:

$$c(\theta)\gamma(\theta)\frac{\partial\theta(x,y,t)}{\partial t} = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(\theta)x\frac{\partial\theta(x,y,t)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(\theta)\frac{\partial\theta(x,y,t)}{\partial y}\right) + F(x,y)u(t);$$

$$0 < x < R; 0 < y < L; 0 < t < t_1; \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\lambda(\theta)\frac{\partial\theta(R,y,t)}{\partial x} = \alpha(\theta_C(t) - \theta(R,y,t));$$

$$\lambda(\theta)\frac{\partial\theta(x,L,t)}{\partial y} = \alpha(\theta_C(t) - \theta(x,L,t));$$

$$\lambda(\theta)\frac{\partial\theta(x,0,t)}{\partial y} = -\alpha(\theta_C(t) - \theta(x,0,t));$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta(0, y, t)}{\partial x} &= 0; \\ \theta(x, y, 0) &= \theta_0(x, y) = \theta_0 = \text{const.}\end{aligned}\quad (2)$$

На управляющее воздействие $u(t)$ накладывается следующее ограничение:

$$0 \leq u(t) \leq u_{\max} \quad \forall t \in [0, t_1] \quad (3)$$

Здесь x и y – соответственно радиальная и продольная пространственные координаты; R, L – радиус и длина цилиндра; α – коэффициент теплоотдачи, определяющий уровень тепловых потерь с боковой и торцевых поверхностей цилиндра в окружающую среду с температурой $\theta_C(t)$; $F(x, y)$ – функция, характеризующая распределение электромагнитных источников тепла по объему заготовки; θ_0 – начальное распределение температур; $\theta(x, y, t)$ – температурное поле нагреваемого металлического изделия; $c(\theta), \gamma(\theta), \lambda(\theta)$ – удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности материала.

Определяя начальную температуру θ_0 и коэффициент теплоотдачи α с точностью до принадлежности заданным интервалам их возможных значений $\theta_0 \in [\theta_{0_{\min}}, \theta_{0_{\max}}]$, $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, зададим вектор неопределенных факторов как $z = (\theta_0, \alpha) \in Z$, где Z – множество всех допустимых по указанным ограничениям комбинаций величин θ_0 и α .

Пусть качество процесса управления оценивается по критерию оптимального быстрогодействия в интегральной форме:

$$I = \int_0^{t_1} dt = t_1 \rightarrow \min. \quad (4)$$

В случае, когда в системе управления может быть получена в реальном масштабе времени достоверная информация о реализуемой в каждом конкретном случае величине $z = \tilde{z} \in Z$ путем наблюдения за поведением управляемой величины, требования к конечному температурному состоянию $\theta(x, y, \tilde{z}, t_1)$ записываются в виде неравенства

$$\max_{x \in [0, R]; y \in [0, L]} |\theta(x, y, \tilde{z}, t_1) - \theta^{**}(x, y)| \leq \varepsilon_0(\tilde{z}), \quad (5)$$

с учетом заданного в равномерной метрике допуска $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_0(\tilde{z})$ на отклонение конечного температурного состояния $\theta(x, y, \tilde{z}, t_1)$ от требуемого равномерного распределения температур $\theta^{**}(x, y) = \theta^{**} = \text{const}$.

Сформулируем задачу оптимального быстрогодействия.

Необходимо найти такое оптимальное управление $u^*(t)$ в условиях заданных ограничений (3), которое переводит объект, описываемый бесконечной системой уравнений (1), (2), из заданного начального в требуемое конечное состояние (5) за минимально возможное время $t_1 = t_{1\min}$ для каждой из допустимых величин $z = \tilde{z} = (\tilde{\theta}_0, \tilde{\alpha}) \in Z$.

Если пренебречь инерционностью и погрешностями процедур наблюдения и идентификации, величина $\bar{z}$ определяется по некоторой заранее фиксируемой детерминированной зависимости $F(\theta_u(x, y, t))$ от результатов всегда неполного наблюдения $\theta_u(x, y, t)$ за текущим состоянием $\theta(x, y, t)$ объекта:

$$\bar{z} = F(\theta_u(x, y, t)), \quad (6)$$

где $\theta_u(x, y, t)$ и $F(\theta_u(x, y, t))$ выбираются из условия минимальной сложности технической реализации системы управления.

Таким образом, возникает задача проектирования идентификатора (6) и синтеза регулятора $u^* = u^*(\theta_u(x, y, t))$, обеспечивающих решение детерминированной краевой задачи (1)–(6) за минимально возможное время $t_{1\min}$ при некоторых зафиксированных значениях θ_0 и α .

Задачу синтеза такой системы рассмотрим на примере построения оптимальной по быстродействию системы управления процессом индукционного нагрева металлических изделий цилиндрической формы, математическая модель которого представлена уравнениями (1)–(3).

Рассмотрим случай, когда мощность нагрева равномерно распределена по всей длине заготовки при одинаковых тепловых потерях на торцах $y = 0$ и $y = L$ цилиндра и можно ограничиться контролем температурного поля в среднем сечении цилиндра $y = \frac{L}{2}$ с нулевым температурным градиентом $\frac{\partial \theta \left(x, \frac{L}{2} \right)}{\partial y}$, в пре-

делах которого радиальное распределение температур описывается одномерным уравнением теплопроводности.

Пусть в соответствии с требованиями (5) к конечному температурному состоянию требуется обеспечить равномерный нагрев тела до заданной температуры $\theta^{**} = \text{const}$ с предельно достижимой в классе оптимальных по быстродействию двухинтервальных управляющих воздействий u^* релейной формы абсолютной точностью $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ за минимально возможное время $t_1 = t_{1\min}$ при равномерно распределенной начальной температуре $\theta_0(x, y) = \theta_0 = \text{const} < \theta^{**}$ в условиях интервальной неопределенности по величинам θ_0 и α .

Решение детерминированной задачи синтеза замкнутой оптимальной по быстродействию системы управления для любых заранее фиксируемых значений вектора $z = \bar{z} = (\bar{\theta}_0, \bar{\alpha}) \in Z$ приводит к следующему виду оптимального регулятора [3]:

$$u^*(\theta_1, \theta_2, \bar{z}) = \frac{u_{\max}}{2} \left[1 + \text{sign } h_1(\theta_1, \theta_2, \bar{z}) \right], \quad (7)$$

где $h_1(\theta_1, \theta_2, \bar{z})$ – функция переключения оптимального управления u^* , формируемая по измеряемым температурам $\theta_j(t)$ на поверхности $\theta_1 = \theta(R, t)$ и в центре $\theta_2 = \theta(0, t)$ выбранного сечения нагреваемого изделия:

$$h_1(\theta_1, \theta_2, z) = \sum_{j=1}^2 \rho_j(z) (\theta_j^T(z) - \theta_j(t)). \quad (8)$$

Здесь $\theta_j^T(z) = \theta^{**} - \varepsilon_{\min}^{(2)}(z)$, $j=1,2$ – значения температур $\theta_j(t)$ в конце оптимального процесса; коэффициенты $\rho_j(z)$ являются нетривиальными решениями однородной системы линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^2 \rho_j(z) (\theta_j^T(z) - \theta_j(\tilde{t}_m)) = 0, \quad (9)$$

где $\tilde{t}_m$ – момент переключения оптимальной программы u^* с первого интервала управления на второй длительностями Δ_1^* и Δ_2^* , которые могут быть найдены вместе со значением $\varepsilon_{\min}^{(2)}(z)$ минимакса альтернансным методом [4].

Коэффициент ρ_1 в (8) можно принять равным единице, тогда ρ_2 вычисляется по следующему выражению:

$$\rho_2(z) = \frac{\theta_1(\tilde{t}_m, z) - \theta^{**} + \varepsilon_{\min}^{(2)}(z)}{\theta^{**} - \theta_2(\tilde{t}_m, z) - \varepsilon_{\min}^{(2)}(z)}. \quad (10)$$

Полученная замкнутая система управления с регулятором (7) должна быть дополнена идентификатором (6) реализуемых величин $z = \tilde{z}$. Алгоритм идентификации, методика получения которого описана в [1], принимает в линейном приближении следующий вид:

$$z_m = z_{mH} + \sum_{j=1}^2 \eta_{mj} (\theta_j(t_\Phi(z)) - \theta_{jH}) \eta_{mj} = \left(\frac{\partial z_m}{\partial \theta_j(t_\Phi(z))} \right)_{z=z_H}; m=1,2. \quad (11)$$

Здесь $\theta_j(t_\Phi(z))$ – наблюдаемые значения температур на поверхности и в центре заготовки в некоторый фиксированный момент времени $t_\Phi \in (0, \Delta_1^*)$, θ_{jH} – значения температур на поверхности и в центре заготовки в зафиксированный момент времени при номинальных значениях неопределенных параметров $z_H = (\theta_0^*, \alpha^*)$, а коэффициенты η_{mj} при наличии аналитических зависимостей температур $\theta_j(t_\Phi(z))$ вычисляются по правилам дифференцирования неявных функций [1]:

$$\eta_{11} = \frac{\frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}}; \eta_{12} = \frac{\frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}}; \eta_{21} = -\eta_{22} = -\frac{1}{\frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}}. \quad (12)$$

В этом случае алгоритмы определения в реальном времени коэффициента $\rho_2(\tilde{y})$ в (10) и конечных значений температурных состояний $\theta_i^T(\tilde{y})$, $i=1,2$ устанавливаются по следующим зависимостям [1], где

$$\rho_2(\mathbf{z}) = \rho_2(z_H) + \sum_{j=1}^2 \gamma_{2j} (\theta_j(t_\Phi(\mathbf{z})) - \theta_{jH}), \quad (13)$$

$$\theta_i^T(\mathbf{z}) = \theta_i^T(z_H) + \sum_{j=1}^2 \gamma_{ij}^* (\theta_j(t_\Phi(\mathbf{z})) - \theta_{jH}), \quad i=1,2; \quad (14)$$

$$\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^2 \eta_{mj} \beta_{mi}; \gamma_{ij}^* = \sum_{m=1}^2 \eta_{mj} \beta_{mi}^*; \quad (15)$$

$$\beta_{1i} = \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial \theta_0} \right)_{z=z_H}; \beta_{2i} = \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial \alpha} \right)_{z=z_H}; \beta_{1i}^* = \left(\frac{\partial \theta_i^T}{\partial \theta_0} \right)_{z=z_H}; \beta_{2i}^* = \left(\frac{\partial \theta_i^T}{\partial \alpha} \right)_{z=z_H}.$$

Для исследуемых нелинейных моделей все указанные в (12), (15) производные могут быть найдены с требуемой точностью их заменой конечными разностями, вычисленными непосредственно на цифровой модели объекта:

$$\eta_{11} \cong \frac{\frac{\Delta \theta_2}{\Delta \alpha}}{\frac{\Delta \theta_2}{\Delta \alpha} - \frac{\Delta \theta_1}{\Delta \alpha}}; \eta_{12} \cong \frac{\frac{\Delta \theta_1}{\Delta \alpha}}{\frac{\Delta \theta_2}{\Delta \alpha} - \frac{\Delta \theta_1}{\Delta \alpha}}; \eta_{21} = -\eta_{22} \cong -\frac{1}{\frac{\Delta \theta_2}{\Delta \alpha} - \frac{\Delta \theta_1}{\Delta \alpha}}, \quad (16)$$

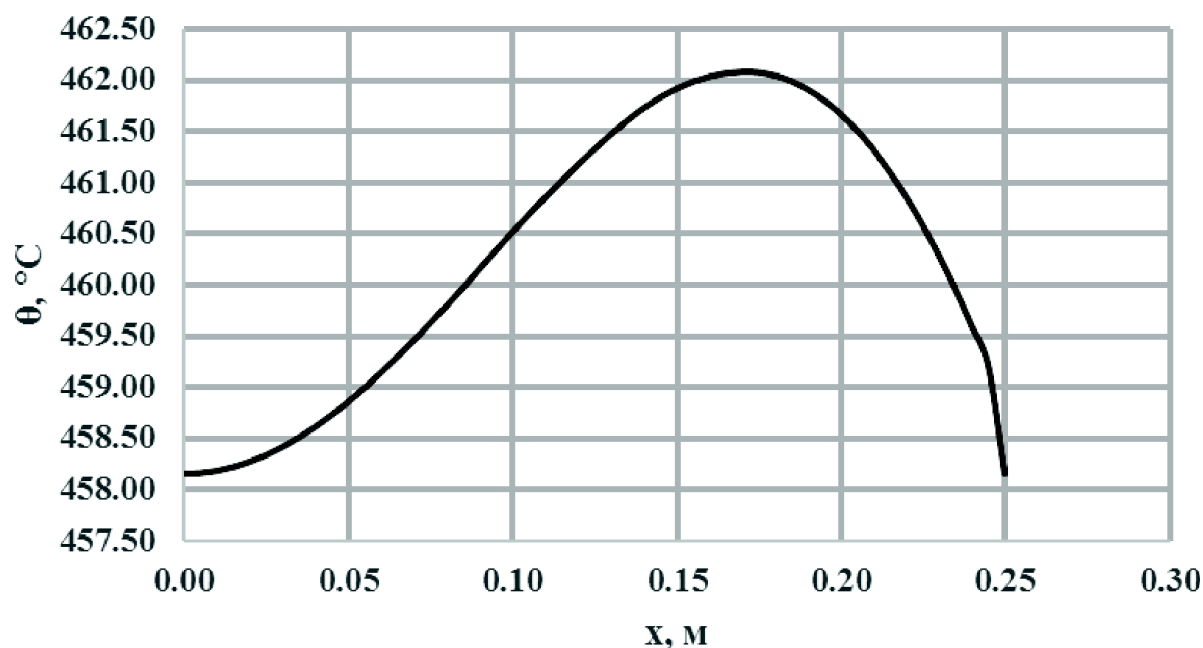
$$\beta_{1i} \cong \frac{\Delta \rho_i}{\Delta \theta_0}; \beta_{2i} \cong \frac{\Delta \rho_i}{\Delta \alpha}; \beta_{1i}^* \cong \frac{\Delta \theta_i^T}{\Delta \theta_0}; \beta_{2i}^* \cong \frac{\Delta \theta_i^T}{\Delta \alpha}.$$

Описанная математическая модель объекта управления (1)–(3) может быть реализована в виде численной двумерной электротепловой модели. В данном исследовании была использована модель процесса сквозного периодического индукционного нагрева алюминиевых цилиндрических слитков, разработанная в специализированном пакете FLUX [5]. Исходные данные модели представлены в таблице.

Исходные данные для процесса индукционного нагрева

Параметр	Значение
$2R$, толщина заготовки, мм	500
L , длина заготовки, мм	1000
λ , теплопроводность, Вт/(м · °С)	115(1+0,0008 θ)
$B(H)$, кривая намагничивания, Тл	$4\pi \cdot 10^{-7} H$
$\rho_{Cp}(\theta)$, объемная теплоемкость, Дж/(м ³ · °С)	$2,34 \times 10^6 (1 + 5,7 \times 10^{-4} \theta)$
$\rho(\theta)$, сопротивление, Ом	$0,3 \times 10^{-7} (1 + 0,007 \theta)$
α , коэффициент конвективного теплообмена	20
θ_0 , начальная температура, °С	20
θ^{**} , конечная температура, °С	460
$u_{\max}$, напряжение на индукторе, В	470
ν , частота, Гц	50

Для данной модели были найдены следующие значения оптимальных параметров: $\Delta_1^* = 1835$ сек.; $\Delta_2^* = 140$ сек.; $\varepsilon_{\min}^{(2)} = 1.8$ °C. Поиск оптимальных параметров осуществлялся путем подбора длительностей интервалов с контролем формы температурного распределения по радиусу заготовки $\theta\left(x, \frac{L}{2}, \Delta_1^*, \Delta_2^*\right)$ (см. рисунок) в центральном сечении $L/2$, согласно альтернансному методу.



Температурное распределение по радиусу центрального сечения цилиндра

$$\theta\left(x, \frac{L}{2}, \Delta_1^*, \Delta_2^*\right)$$

Для исходных номинальных данных, представленных в таблице, а также $z_H = (\theta_0^*, \alpha^*)$, $\theta_0^* = 20$ °C, $\alpha^* = 20$ получены следующие значения коэффициентов в (10), (16):

$$\begin{aligned} \rho_2 &= 0.89, \eta_{11} = 0.13, \eta_{12} = 0.87, \eta_{21} = 0.31, \eta_{22} = -0.31, \beta_{12} = 0.03, \beta_{22} = -0.06, \\ \gamma_{21} &= -0.02, \beta_{11} = \beta_{21} = 0, \beta_{11}^* = 0.35, \beta_{12}^* = 0.44, \beta_{21}^* = 0.13, \beta_{22}^* = 0.44 \\ \gamma_{11} &= \gamma_{12} = 0, \gamma_{22} = 0.05, \gamma_{11}^* = 0.08, \gamma_{21}^* = 0.19, \gamma_{12}^* = 0.26, \gamma_{22}^* = 0.24. \end{aligned}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рапопорт Э.Я., Левин И.С. Структурно-параметрический синтез оптимальных по быстродействию систем управления с распределенными параметрами в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта // Автометрия. – 2015. – Т. 51. – № 5. – С. 3–16.
2. Рапопорт Э.Я. Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. – М.: Металлургия, 1993. – 279 с.
3. Рапопорт Э.Я. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2009. – 677 с.
4. Рапопорт Э.Я., Плешивцева Ю.Э. Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. – М.: Наука, 2012. – 309 с.

5. Плешивцева Ю.Э., Попов А.В., Дьяконов А.И. Двумерная задача оптимального по типовым критериям качества управления процессом сквозного индукционного нагрева // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2014. – № 2 (42). – С. 148–163.

Статья поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

STATE IDENTIFIER OF DIGITAL MODEL OF THE INDUCTION HEATING PROCESS

I.S. Levin

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

E-mail: levin_ilja@yahoo.com

The solution of the following problem was described. It is necessary to construct a state identifier of time-optimal closed loop system that controls the process of induction heating of cylindrical billets. This process can be specified by a nonlinear nonhomogeneous heat-transfer equation. For the purpose of the modelling such process a digital model developed in FLUX software was used. The procedure of identification in conditions of interval uncertainty of process parameters was proposed. It based on previously developed algorithm of analytical synthesis of inertialess state observer for the objects with distributed parameters which was described with linear spatial one-dimensional partial differential parabolic equations.

Keywords: *distributed parameter system, induction heating, control with interval uncertainty of object's characteristics, state observer.*