УДК 53.083

АППРОКСИМАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙН-ФИЛЬТРА*

П.К. Ланге, М.Б. Унгаров, О.В. Матвеев

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Рассмотрен кубический сплайн-фильтр, аппроксимирующий дискретные значения измерительного сигнала. Коэффициенты фильтра определяются на основе частотного критерия. Приведены частотные характеристики кубического сплайн-фильтра и ряда параболических сплайн-фильтров. Определены погрешности аппроксимации дискретных значений гармонического сигнала. Проанализированы погрешности аппроксимации рассмотренными фильтрами дискретных значений сигнала гауссовой формы. Определены области применения аппроксимирующего сплайн-фильтра при обработке сигнала в реальном темпе времени.

Ключевые слова*: сплайн-функция, частотный критерий, кубический сплайн, дискретные значения сигнала.*

Алгоритмы аппроксимации сигнала часто используются при сжатии измерительных сигналов во временной области. Они позволяют на предварительном этапе его преобразования определять коэффициенты функций, аппроксимирующих его дискретные значения. Эти коэффициенты часто являются информационными параметрами, например коэффициенты параболической или кубической аппроксимации сигналов определяют значения первой и второй производных таких сигналов.

Кроме того аппроксимация дискретных значений сигнала позволяет снизить погрешности, связанные с наложением копий частотных спектров сигнала (aliasing), возникающим при его дискретизации.

При аппроксимации дискретных данных обычно используется алгоритм аппроксимации параболой дискретных данных $x[n]$, заданных в моменты времени $t[n]$ с использованием метода наименьших квадратов по пяти дискретным точкам [1].

Однако такого рода алгоритмы при работе в режиме реального времени (online) требуют значительных вычислительных ресурсов, и с этой точки зрения более перспективными являются алгоритмы, интерполирующие или аппроксимирующие дискретные значения сигнала простыми функциями на ограниченном отрезке его наблюдения. К таким функциям относятся кусочно-линейная интерполяция, а также сплайн-функции, обеспечивающие удовлетворительную погрешность аппроксимации дискретных значений сигнала. Однако большинство известных алгоритмов определения коэффициентов сплайн-функций также требует значительных вычислительных ресурсов и поэтому используется в основ-

---

**Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-08-00252 А.*

Петр Константинович Ланге (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Информационно-измерительная техника».

Марат Булатович Унгаров, аспирант.

Олег Васильевич Матвеев, аспирант.

ном при обработке всей реализации сигнала в режиме раздельного времени (offline). В связи с этим актуальной является задача разработки простых алгоритмов определения коэффициентов сплайн-аппроксимаций дискретных значений сигналов в режиме реального времени.

Одним из методов аппроксимации сигнала является метод аппроксимации сплайн-функциями, представляющими собой гладкие кривые, «сшитые» на границах участков аппроксимации вместе со своими несколькими производными.

Параболические сплайны «сшиты» на границах дискретных участков по 0-й и 1-й производным, а кубические – по 0-й, 1-й и 2-й производным.

Вторая производная у параболической сплайн-функции и третья – у кубической сплайн-функции на границах участков претерпевают разрыв с конечным скачком. Алгоритмы параболической сплайн-аппроксимации были рассмотрены в [2].

Параболическая функция, аппроксимирующая сигнал $U_x(t)$, на его n-м дискретном участке описывается выражением

$$U_y(t) = a_2[n]t^2 + a_1[n]t + a_0[n], \tag{1}$$

где $a_2[n]$, $a_1[n]$, $a_0[n]$ – постоянные коэффициенты.

Рассмотрим задачу определения коэффициентов кубического сплайна. Он описывается на n-м участке аппроксимации уравнением, аналогичным (1):

$$U_y(t) = a_3[n]t^3 + a_2[n]t^2 + a_1[n]t + a_0[n]. \tag{2}$$

Кубическая сплайн-аппроксимация дискретных значений сигнала характеризуется меньшей погрешностью аппроксимации по сравнению с параболической [2], однако при ее использовании на каждом участке аппроксимации необходимо определять на один коэффициент больше. Рассмотрим метод определения коэффициентов кубической сплайн-аппроксимации.

Производные сигнала $U_y(t)$ определяются выражениями

$$\frac{dU_y}{dt} = 3a_3[n]t^2 + 2a_2[n]t + a_1[n]\ ; \tag{3}$$

$$\frac{d^2U_y}{dt^2} = 6a_3[n]t + 2a_2[n]. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует:

$$\left.\frac{dU_y}{dt}\right|_{t=0} = a_1[n]\ ; \qquad \left.\frac{d^2U_y}{dt^2}\right|_{t=0} = 2a_2[n]. \tag{5}$$

Из (2)–(5) определяются граничные значения (при $t = t_d$):

$$a_0[n+1] = U_y(t)\Big|_{t=t_d}\ ; \quad a_1[n+1] = \left.\frac{dU_y}{dt}\right|_{t=t_d}\ ;$$

$$2a_2[n+1] = \left.\frac{d^2U_y}{dt^2}\right|_{t=t_d}\ ;$$

где t_d – интервал дискретизации сигнала $U_y(t)$.

Следовательно, коэффициенты $a_i[n]$ кубического сплайна связаны соотношениями

$$\left.\begin{aligned} a_0[n+1] &= t_d^3 a_3[n] + t_d^2 a_2[n] + t_d a_1[n] + a_0\ ; \\ a_1[n+1] &= 3t_d^2 a_3[n] + 2t_d a_2[n] + a_1[n]\ ; \\ 2a_2[n+1] &= 6t_d a_3[n] + 2a_2[n]\ . \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Z-преобразование этих соотношений имеет вид

$$\left.\begin{aligned} t_d^3 a_3[n] + t_d^2 a_2[n] + t_d a_1[n] + (1-z)a_0[n] &= 0; \\ 3t_d^2 a_3[n] + 2t_d a_2[n] + (1-z)a_1[n] &= 0\ ; \\ 6t_d a_3[n] + (1-z)2a_2[n] &= 0\ . \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Пусть передаточная функция фильтра, определяющая младший коэффициент $a_0[n]$ кубической функции (2), имеет вид [2]

$$a_0[n] = \sum_{m=-k}^{k} b_m U_x[n+m].$$

Используя Z-преобразование этой функции, получаем

$$a_0[z] = F[z]\cdot U_X[z]\ .$$

Подставляя полученное соотношение в (7), определяем систему

$$\left.\begin{aligned} t_d^3 a_3[z] + t_d^2 a_2[z] + t_d a_1[z] &= (z-1)F[z]U_x[z]\ ; \\ 3t_d^2 a_3[z] + 2t_d a_2[z] + (1-z)a_1[z] &= 0\ ; \\ 3t_d a_3[z] + (1-z)a_2[z] &= 0\ . \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Определитель (8) равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} t_d^3 & t_d^2 & t_d \\ 3t_d^2 & 2t_d & (1-z) \\ 3t_d & (1-z) & 0 \end{vmatrix} = -\ t_d^3\left(z^2+4z+1\right).$$

Определители коэффициентов a_i равны

$$\Delta a_1 = \begin{vmatrix} t_d^3 & t_d^2 & (z-1)F[z]U[z] \\ 3t_d^2 & 2t_d & 0 \\ 3t_d & (1-z) & 0 \end{vmatrix} = -3t_d^2\left(z^2-1\right)F[z]U_x[z],$$

$$\Delta a_2 = \begin{vmatrix} t_d^3 & (z-1)F[z]U[z] & t_d \\ 3t_d^2 & 0 & (1-z) \\ 3t_d & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3t_d(1-z)^2 F[z]U_x[z],$$

$$\Delta a_3 = \begin{vmatrix} (z-1)F[z] & t_d^2 & t_d \\ 0 & 2t_d & (1-z) \\ 0 & (1-z) & 0 \end{vmatrix} = (1-z)^3 F[z]U_x[z].$$

Отсюда определяются выражения для коэффициентов $a_i[z]$:

$$\left.\begin{aligned} a_1[z] &= \frac{1}{t_d}\cdot\frac{3(z^2-1)}{z^2+4z+1}F[z]U_x[z] \quad ; \\ a_2[z] &= \frac{1}{t_d^2}\cdot\frac{3(1-z)^2}{z^2+4z+1}F[z]U_x[z] \quad ; \\ a_3[z] &= -\frac{1}{t_d^3}\cdot\frac{(1-z)^3}{z^2+4z+1}F[z]U_x[z] \quad . \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Из рассмотрения (9) можно сделать вывод, что для минимальной фазовой погрешности аппроксимации функция $F[z]$ кубического сплайн-фильтра должна делиться без остатка на трехчлен (z^2+4z+1) [1].

Методика определения коэффициентов функции $F[z]$ кубического сплайн-фильтра соответствует методике [2] определения аналогичных коэффициентов функции для параболического сплайн-фильтра.

В качестве примера определим коэффициенты функции для пятиточечного кубического сплайн-фильтра с симметричной весовой характеристикой:

$$\begin{aligned} a_0[n] &= b_2U_x[n-2]+b_1U_x[n-1]+b_0U_x[n]+ \\ &+b_1U_x[n+1]+b_2U_x[n+2]. \end{aligned} \tag{10}$$

Z-преобразование этого выражения имеет вид

$$a_0[z] = \left(b_2z^2+b_1z+b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}\right)U_x[z]. \tag{11}$$

В связи с тем, что это выражение аналогично соответствующему выражению для пятиточечного параболического сплайн-фильтра [2], из уравнений, определяющих частотную характеристику фильтра и ее производную, получаем:

$$\left.\begin{aligned} b_0+2b_1+2b_2 &= 1\ ; \\ b_1+4b_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Еще одно соотношение, связывающее коэффициенты b_i функции фильтра, определяем исходя из (9) для коэффициента $a_1[n]$:

$$\begin{aligned} a_1[z] &= \frac{1}{t_d}\cdot\frac{(z^2-1)F[z]U_x[z]}{(z^2+4z+1)} = \frac{U_x[z]}{t_d}\cdot(z^2-1)z^{-2}\Big[b_2z^2+ \\ &+(b_1-4b_2)z+(b_0-4b_1+15b_2)-\frac{4z+1}{z^2+4z+1}(b_0-4b_1+14b_2)\Big]. \end{aligned} \tag{13}$$

Последний член в (13) определяет остаток при делении двух многочленов, и он должен быть равен нулю.

Это выполняется при условии

$$b_0-4b_1+14b_2 = 0. \tag{14}$$

Уравнения (12) и (14) определяют систему:

$$\left.\begin{aligned} b_0+2b_1+2b_2&=1;\\ b_1+4b_2&=0;\\ b_0-4b_1+14b_2&=0.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Решение (15) определяет значения коэффициентов сплайн-фильтра:

$$b_0=\frac{30}{36};\quad b_1=\frac{4}{36};\quad b_2=-\frac{1}{36}. \tag{16}$$

Таким образом, младший коэффициент $a_0[n]$ 5-точечного кубического сплайна определяется уравнением

$$\begin{aligned} a_0[n]&=\frac{1}{36}\big(-U_x[n-2]+4U_x[n-1]+\\ &+30U_x[n]+4U_x[n+1]-U_x[n+2]\big).\end{aligned} \tag{17}$$

Выражения для остальных трех коэффициентов кубического сплайна легко определяются исходя из (9):

$$\left.\begin{aligned} &a_1[n]=\frac{1}{12t_d}\big(U_x[n-2]-8U_x[n-1]+8U_x[n+1]-U_x[n+2]\big);\\ &a_2[n]=\frac{1}{12t_d^2}\big(-U_x[n-2]+10U_x[n-1]-18U_x[n]+10U_x[n+1]-\\ &-U_x[n+2]\big);\\ &a_3[n]=\frac{1}{36t_d^3}\big(U_x[n-2]-11U_x[n-1]+28U_x[n]-28U_x[n+1]+\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$+11U_x[n+2]-U_x[n+3]\big).$$

Выражения (17) – (18) с целью более простой реализации [3] целесообразно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} &a_0[n]=\frac{X_1[n]+4X_2[n]+X_3[n]}{6};\ a_1[n]=\frac{X_3[n]-X_1[n]}{2t_d};\\ &a_2[n]=\frac{X_1[n]-2X_2[n]+X_3[n]}{2t_d^2};\\ &a_3[n]=\frac{-X_1[n]+3X_2[n]-3X_3[n]+X_4[n]}{6t_d^3};\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned} X_1&=\tfrac{1}{6}\big(-U_x[n-2]+8U_x[n-1]-U_x[n]\big);\\ X_2&=\tfrac{1}{6}\big(-U_x[n-1]+8U_x[n]-U_x[n+1]\big);\\ X_3&=\tfrac{1}{6}\big(-U_x[n]+8U_x[n+1]-U_x[n+2]\big);\\ X_4&=\tfrac{1}{6}\big(-U_x[n+1]+8U_x[n+2]-U_x[n+3]\big)\end{aligned}$$

Z-преобразование амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) кубического сплайна может быть определено из (11) выражением

$$K[z]=\frac{a_0[z]}{U_x[z]}=b_2z^2+b_1z+b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}. \tag{20}$$

АЧХ кубического сплайна определяется из (20) при использовании подстановки $z = e^{j\varpi} = \cos\varpi + j\sin\varpi$:

$$K(\varpi) = \frac{15 + 4\cos\varpi - \cos 2\varpi}{18},$$

где $\varpi = 2\pi \bar{f}$, $\bar{f} = 1/N$ – относительная частота входного сигнала; N – число интервалов дискретизации на периоде входного сигнала U_x.

Амплитудно-частотная характеристика $K\left(\bar{f}\right)$ кубического сплайна, а также аналогичные характеристики параболических сплайнов [2] изображены на рис. 1.

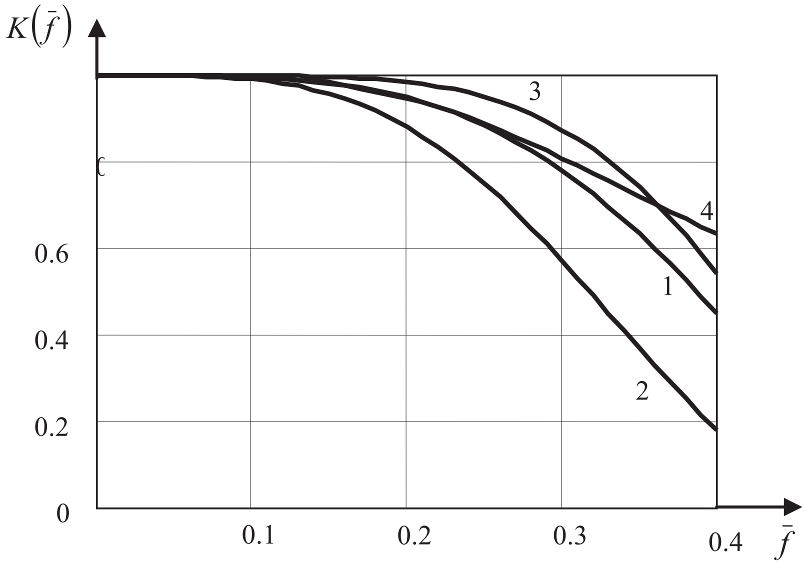

Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики цифровых фильтров, реализующих сплайн-аппроксимацию: 1 – четырехточечным параболическим сплайном, 2 – пятиточечным параболическим сплайном, 3 – шеститочечным параболическим сплайном, 4 – пятиточечным кубическим сплайном

Сравнив частотные характеристики параболических и кубического сплайн-фильтров, можно сделать вывод, что кубический сплайн-фильтр при малом числе дискретных значений на периоде сигнала (N<5) обеспечивает меньшую погрешность аппроксимации этого сигнала, чем параболические сплайн-фильтры.

Например, пятиточечный параболический сплайн-фильтр при 2,5 дискретных отсчетах на периоде сигнала ($\bar{f} = 0,4$) имеет погрешность по амплитуде около 50 %, а пятиточечный кубический сплайн-фильтр – около 30 %. Представляет интерес анализ погрешности аппроксимации кубическим сплайном дискретных значений конкретного сигнала. В качестве примера рассмотрена аппроксимация сигнала гауссовой формы, характерного для сигналов приборов для анализа состава и свойств веществ (хроматографа, спектроанализатора, термического анализатора). Аппроксимация такого сигнала кубическим сплайном представлена на рис. 2.

Как можно заметить, погрешность аппроксимации сигнала гауссовой формы кубическим сплайном достаточно мала при небольшом числе дискретных значений (в данном примере – 8 значений на гауссов пик).

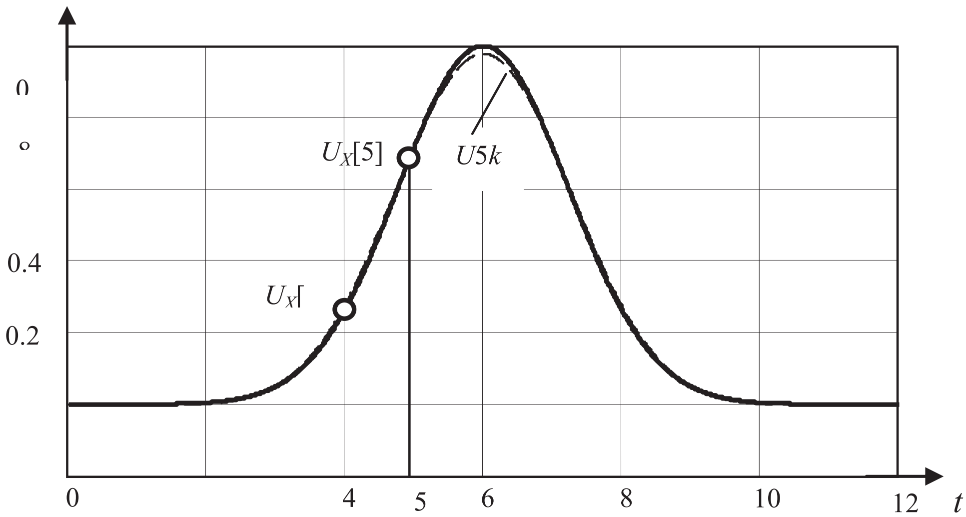

Рис. 2. Аппроксимация дискретных значений сигнала $U_X[n]$ пятиточечным кубическим сплайном $U5k$ (штриховая линия)

График погрешности аппроксимации такого сигнала разными сплайнами представлен на рис. 3.

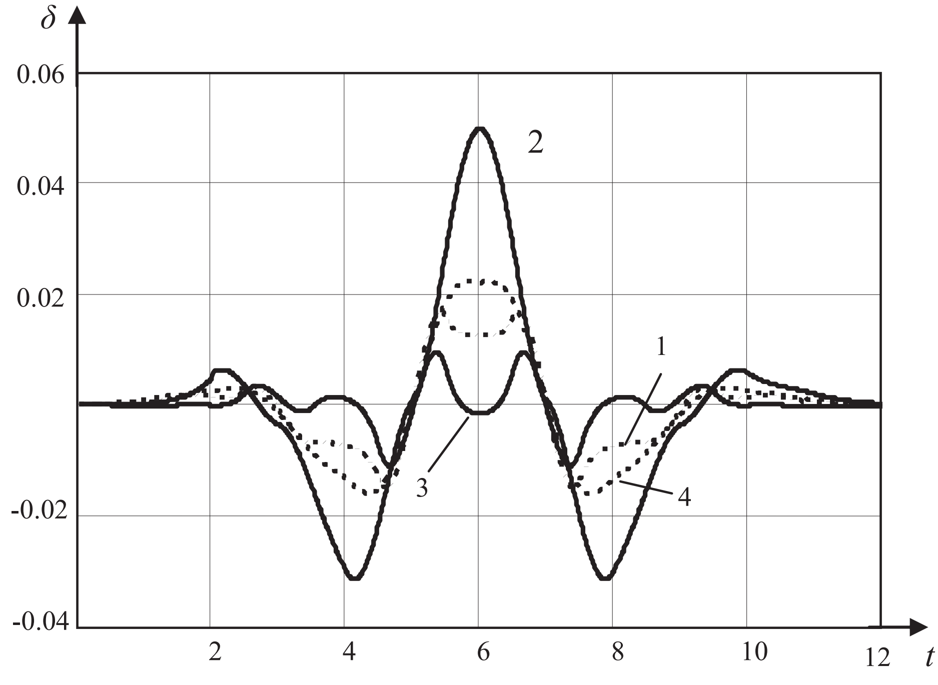

Рис. 3. Погрешность аппроксимации гауссова сигнала сплайнами:
1 – четырехточечным параболическим сплайном, 2 – пятиточечным параболическим сплайном, 3 – шеститочечным параболическим сплайном, 4 – пятиточечным кубическим сплайном

При рассмотрении этих графиков можно сделать вывод, что кубический пятиточечный сплайн имеет более чем в два раза меньшую погрешность (≈2 %) аппроксимации гауссова сигнала по сравнению с пятиточечным параболическим сплайном (5 %).

Используемый подход может быть применен и при определении коэффициентов кубического сплайна с числом точек, большим пяти, например коэффициентов семи- или девятиточечного сплайна.

Многоточечные сплайны целесообразно использовать для сглаживания сигнала в случаях его аппроксимации при наличии аддитивных помех.

Применительно к обработке измерительных сигналов достаточным является использование пятиточечных кубических сплайн-фильтров. Необходимо заметить, что используемый в данной работе подход позволяет определить коэффициенты кубической сплайн-аппроксимации сигнала при произвольном числе его дискретных значений.

Достоинством кубических сплайнов по сравнению с параболическими является более качественная аппроксимация сигнала, а также возможность оценки его 1-й, 2-й и 3-й производных.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лайонс Р.* Цифровая обработка сигналов. – М.: Бином, 2011. – 656 с.
2. *Ланге П.К.* Сплайн-аппроксимация дискретных значений сигналов с применением методов цифровой фильтрации // Сб. труд. Самарского гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – Самара: Сам. гос. техн. ун-т, 2003. – Вып. 19. – С. 134–138.
3. Методы сплайн - функций / *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* – М.: Наука, 1980. – 353 с.

Статья поступила в редакцию 3 марта 2016 г.

DISCRETE VALUE APPROXIMATION OF THE SIGNALS BY A CUBIC SPLINE – FILTERS

P.K. Lange, M.B. Ungarov, O.V. Matveev

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

The cubic spline - filter for the signal discrete values approximation is considered. The filter coefficients are determined on the basis of a frequency criterion. The frequency characteristics of a cubic spline - filter and a series of parabolic spline – filters are presented. Errors of approximation of the discrete values of harmonic signal are determinated. The error of approximation of discrete values of the Gaussian signal by considered filters are analyzed. Areas of approximating spline - filters application for on - line signal processing are described.

Keywords*: spline-function, the frequency criterion, cubic spline, signal samples.*

Petr K. Lange (Dr. Sci. Techn.), Professor.
Marat B. Ungarov, Postgraduate Student.
Oleg V. Matveev, Postgraduate Student.