

## Энергетика

УДК 536.2 (075)

### ПОЛУЧЕНИЕ РЕШЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ТРЕТЬЕГО РОДА

*И.В. Кудинов, Л.С. Абишева, М.П. Скворцова, Г.Н. Максименко*

Самарский государственный технический университет  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: totig@yandex.ru

*На основе метода Фурье найдено точное аналитическое решение гиперболического уравнения теплопроводности для пластины с граничными условиями третьего рода. Показано, что теплообмен в пластине сопровождается движением фронта теплового возмущения, а исследуемая область разделяется на две подобласти – возмущенную, где температура меняется от ее значения на стенке до значения на фронте, и невозмущенную, в пределах которой сохраняется начальная температура. В отличие от результатов решения соответствующего параболического уравнения скорость распространения теплоты в данном случае оказывается конечной. При больших значениях числа  $Fo_r$  на температурных кривых появляется излом, который при  $Bi \rightarrow \infty$  переходит в скачок температуры. При этом колебательный процесс происходит в области как положительных, так и отрицательных температур.*

**Ключевые слова:** гиперболическое уравнение, граничные условия третьего рода, точное аналитическое решение, фронт тепловой волны, скачок температуры, время релаксации, скорость волны, обратная тепловая волна.

В работах [1–3] дана последовательность получения и результаты исследования точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности для пластины с симметричными граничными условиями первого рода. И, в частности, было показано, что в процессе нагрева (охлаждения) пластины на фронте температурного возмущения наблюдается скачок температуры. При достижении фронтом возмущения центра пластины возникает обратная волна, также имеющая скачок температуры на ее фронте. В процессе детального исследования полученного решения было обнаружено, что в отдельные моменты времени процесса охлаждения температура

---

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-38-00059 мол\_а.*

*Игорь Васильевич Кудинов (к.т.н.), доцент кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика».*

*Любовь Сергеевна Абишева, ассистент кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика».*

*Марина Петровна Скворцова, аспирант.*

*Галина Николаевна Максименко, аспирант.*

на некоторых участках внутри пластины может оказаться меньшей температуры, заданной граничными условиями первого рода. Причиной полученных результатов является инерционность теплового потока, определяемого формулой

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} - \tau_r \frac{\partial q}{\partial \tau}, \quad (1)$$

где  $\tau_r = a/w^2$  – коэффициент релаксации (время релаксации);  
 $w$  – скорость тепловой волны;  
 $a$  – коэффициент температуропроводности.

Из формулы (1) следует, что когда градиент температуры становится равным нулю ( $\partial t/\partial x = 0$ ), тепловой поток не исчезает мгновенно, а затухает со временем релаксации. Такая закономерность изменения теплового потока приводит к осцилляциям температуры внутри пластины в процессе теплообмена, которые в отдельные моменты времени могут проникать в область отрицательных значений температур.

Для рассмотрения и анализа особенностей теплообмена при краевых условиях третьего рода найдем решение задачи вида

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} + Fo_r \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2}; \quad (Fo > 0; 0 < \xi < 1); \quad (2)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (3)$$

$$\partial \Theta(\xi, 0) / \partial Fo = 0; \quad (4)$$

$$\partial \Theta(0, Fo) / \partial \xi = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \xi} + Bi \Theta(1, Fo) = 0, \quad (6)$$

где  $\Theta = \frac{t - t_{cp}}{t_0 - t_{cp}}$ ;  $\xi = \frac{x}{\delta}$ ;  $Fo = \frac{a\tau}{\delta^2}$ ;  $Fo_r = \frac{a\tau_r}{\delta^2}$ ;  $Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda}$ ;

$\Theta$  – безразмерная температура;

$\xi$  – относительная координата;

$Fo$  – число Фурье;

$Fo_r = \text{const}$ ;

$Bi$  – число Био;

$t$  – температура;

$\tau$  – время;

$x$  – координата;

$\delta$  – толщина пластины;

$t_0$  – начальная температура;

$t_{cp}$  – температура среды;

$\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности.

С целью упрощения процесса получения решения задачи (2)–(6) инерционностью теплового потока в граничном условии третьего рода пренебрегаем. Отметим, что при больших значениях  $\alpha$  (или при малых величинах  $\lambda$ ) данное допущение практически не будет влиять на получаемое решение.

Решение задачи (2) – (6) принимается в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \varphi(Fo)\psi(\xi). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (2), находим

$$Fo_r \frac{d^2\varphi}{dFo^2} + \frac{d\varphi}{dFo} + v^2\varphi = 0; \quad (8)$$

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + v^2\psi = 0, \quad (9)$$

где  $v$  – некоторая постоянная.

Подставляя (7) в (5), (6), находим граничные условия для уравнения (9):

$$\frac{d\psi(0)}{d\xi} = 0; \quad (10)$$

$$\frac{d\psi(1)}{d\xi} + Bi\psi(1) = 0. \quad (11)$$

Решение задачи Штурма – Лиувилля (9)–(11) принимается в виде

$$\psi(\xi) = \cos(v\xi). \quad (12)$$

Соотношение (12) удовлетворяет уравнению (9) и граничному условию (10). Подставляя (12) в (11), получаем

$$[-v \sin(v\xi) + Bi \cos(v\xi)]_{\xi=1} = 0. \quad (13)$$

Отсюда относительно  $v$  получаем следующее тригонометрическое уравнение:

$$\operatorname{ctg} v = v / Bi. \quad (14)$$

Уравнение (14) для любого конкретного  $Bi$  удовлетворяется лишь при некоторых дискретных значениях величины  $v$ , называемых собственными значениями. Например, при  $Bi \rightarrow \infty$  получаем

$$v_k = (2k - 1)\pi / 2; \quad (k = \overline{1, \infty}). \quad (15)$$

Значения  $v_k$ , определяемые по формуле (15), совпадают с собственными числами краевой задачи Штурма – Лиувилля при граничных условиях первого рода. Для любых других значений числа  $Bi$  уравнение (14) решается численными методами или графически.

Для однородного дифференциального уравнения (8) можно записать следующее характеристическое уравнение:

$$Fo_r z^2 + z + v_k^2 = 0; \quad (k = \overline{1, \infty}). \quad (16)$$

Если  $D = (4Fo_r v_k^2 - 1) < 0$ , то уравнение (16) для любого собственного значения имеет два действительных отрицательных корня  $z_{1k}$  и  $z_{2k}$ :

$$z_{ik} = (1 \pm \sqrt{1 - 4Fo_r v_k^2}) / (2Fo_r); \quad (i = 1, 2; \quad k = \overline{1, \infty}). \quad (17)$$

С учетом найденных величин  $z_{1k}$  и  $z_{2k}$  решение уравнения (8) для каждого собственного значения будет

$$\varphi_k(\text{Fo}) = C_{1k} \exp(z_{1k} \text{Fo}) + C_{2k} \exp(z_{2k} \text{Fo}), \quad (18)$$

где  $C_{jk}$  ( $j=1, 2; k=\overline{1, \infty}$ ) – неизвестные коэффициенты, определяемые из начальных условий (3), (4).

Подставляя (12), (18) в (7), находим

$$\Theta_k(\xi, \text{Fo}) = [C_{1k} \exp(z_{1k} \text{Fo}) + C_{2k} \exp(z_{2k} \text{Fo})] \cos(v_k \xi); \quad (k = \overline{1, \infty}). \quad (19)$$

Каждое частное решение (19) точно удовлетворяет уравнению (2) и граничным условиям (5), (6). Для выполнения начальных условий (3), (4) составим сумму частных решений:

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} [C_{1k} \exp(z_{1k} \text{Fo}) + C_{2k} \exp(z_{2k} \text{Fo})] \cos(v_k \xi). \quad (20)$$

Подставляя (20) в (4), получаем

$$C_{1k} = -C_{2k} z_{2k} / z_{1k}. \quad (21)$$

Подставляя (20) в (3), с учетом (21) находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{2k} (1 - z_{2k} / z_{1k}) \cos(v_k \xi) = 1. \quad (22)$$

Соотношение (22) представляет разложение единицы в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля (9)–(11). Умножим уравнение (22) на  $\cos(v_k \xi)$  и проинтегрируем полученное соотношение в пределах от  $\xi = 0$  до  $\xi = 1$ :

$$\int_0^1 \left[ \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k} \left( 1 - \frac{z_{2k}}{z_{1k}} \right) \cos(v_k \xi) - 1 \right] \cos(v_k \xi) d\xi = 0. \quad (23)$$

Соотношение (23) ввиду ортогональности косинусов приводится к виду

$$\int_0^1 C_{2k} \left( 1 - \frac{z_{2k}}{z_{1k}} \right) \cos^2(v_k \xi) d\xi - \int_0^1 \cos(v_k \xi) d\xi = 0. \quad (k = \overline{1, \infty}). \quad (24)$$

Определяя интегралы в (24), находим

$$C_{2k} = \frac{\sin v_k}{(1 - z_{2k} / z_{1k}) [v_k / 2 + 0,25 \sin(2v_k)]}; \quad (k = \overline{1, \infty}). \quad (25)$$

В результате нахождения неизвестных коэффициентов  $C_{1k}$  и  $C_{2k}$  ( $k = \overline{1, \infty}$ ) точное аналитическое решение задачи (2)–(6) находится из (20).

Если дискриминант соотношения (17)  $D = (4\text{Fo}_r v_k - 1) > 0$ , то будем иметь следующие два комплексных корня:

$$z_{1k} = \gamma + i\beta; \quad z_{2k} = \gamma - i\beta,$$

где  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\gamma = -0,5 / Fo_r$ ;  $\beta = (\sqrt{4Fo_r v_k - 1}) / (2Fo_r)$ .

Частные решения уравнения (8) будут

$$\phi_{1k} = \exp(\gamma + i\beta)Fo; \quad \phi_{2k} = \exp(\gamma - i\beta)Fo. \quad (26)$$

На основе частных решений запишем общий интеграл уравнения (8):

$$\varphi_k(Fo) = C_{1k} \exp[(\gamma + i\beta)Fo] + C_{2k} \exp[(\gamma - i\beta)Fo], \quad (27)$$

где  $C_{jk}$  ( $j = 1, 2$ ;  $k = \overline{1, \infty}$ ) – неизвестные постоянные.

Соотношение (27) можно переписать следующим образом:

$$\varphi_k(Fo) = \exp(\gamma Fo) [C_{1k} \exp(i\beta Fo) + C_{2k} \exp(-i\beta Fo)]. \quad (28)$$

В отличие от решения этой задачи, приведенного в [5, 6] в настоящей статье возникающие нелинейные части корней уравнения (16) с помощью формул Эйлера включаются в константы интегрирования.

С использованием формул Эйлера  $\exp(is) = \cos s + i \sin s$ ;  $\exp(-is) = \cos s - i \sin s$  соотношение (28) приводится к виду

$$\begin{aligned} \varphi_k(Fo) &= \exp(\gamma Fo) [C_{1k} (\cos(\beta Fo) + i \sin(\beta Fo)) + C_{2k} (\cos(\beta Fo) - i \sin(\beta Fo))] = \\ &= \exp(\gamma Fo) [(C_{1k} + C_{2k}) \times \cos(\beta Fo) - i (C_{2k} - C_{1k}) \sin(\beta Fo)]. \end{aligned} \quad (29)$$

Соотношение (29) с учетом обозначений  $C_{1k} + C_{2k} = B_{1k}$ ;  $i (C_{2k} - C_{1k}) = B_{2k}$  будет

$$\varphi_k(Fo) = \exp(\gamma Fo) [B_{1k} \cos(\beta Fo) - B_{2k} \sin(\beta Fo)]. \quad (30)$$

Подставляя (12), (30) в (7) и составляя сумму частных решений, находим

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ [\exp(\gamma Fo) [B_{1k} \cos(\beta Fo) - B_{2k} \sin(\beta Fo)]] \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right) \right\}. \quad (31)$$

$$(r = 2k - 1; \quad k = \overline{1, \infty})$$

Для определения постоянных  $B_{1k}$  и  $B_{2k}$  используются начальные условия (3), (4). Подставляя (31) в (4), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\gamma B_{1k} - \beta B_{2k}) \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right) = 0.$$

Отсюда находим

$$B_{2k} = \gamma B_{1k} / \beta. \quad (32)$$

Подставляя (31) в (3), с учетом (32) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right) = 1. \quad (33)$$

Умножая обе части соотношения (33) на  $\cos\left(j \frac{\pi}{2} \xi\right)$  ( $j = 2k - 1$ ) и интегрируя в пределах от  $\xi = 0$  до  $\xi = 1$ , находим

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right) \cos\left(j \frac{\pi}{2} \xi\right) d\xi = \int_0^1 \cos\left(j \frac{\pi}{2} \xi\right) d\xi. \quad (34)$$

Соотношение (34) с учетом ортогональности косинусов примет вид

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} \cos^2\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right) d\xi - \int_0^1 \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right) d\xi = 0. \quad (35)$$

Определяя интегралы в (35), получаем

$$B_{1k} = \frac{4}{r\pi}. \quad (36)$$

После определения постоянных  $B_{1k}$  и  $B_{2k}$  решение задачи в замкнутом виде находится из (31). Непосредственной подстановкой показали, что все уравнения задачи (2)–(6) решениями (20) и (31) выполняются точно.

Данные расчетов по формуле (31) позволяют заключить, что при  $Bi \rightarrow \infty$  полученное решение полностью совпадает с решением данной задачи при краевых условиях первого рода [4].

При малых значениях  $Fo_r$ , то есть когда вторым слагаемым в уравнении (2) можно пренебречь, результаты решения по формуле (20) полностью совпадают с решением соответствующего параболического уравнения теплопроводности при граничных условиях третьего рода [4].

С увеличением числа  $Fo_r$  для одних и тех же чисел  $Bi$  на температурных кривых появляется излом, фронт которого перемещается по координате  $\xi$  во времени (рис. 1). При этом обнаруживаются прямая и обратная температурные волны. Излом на прямой волне заключается в том, что температурные кривые составляют некоторый угол с линией температуры  $\Theta = 1,0$  (начальная температура пластины). Отметим, что в случае параболического уравнения теплопроводности до моментов времени, когда фронт тепловой волны не достигает центра пластины, температурные кривые являются касательными к линии  $\Theta = 1,0$ .

После того как фронт тепловой волны достигает центра пластины, наблюдается обратная тепловая волна, также характеризующаяся изломом температурных кривых (см. рис. 1, 2). После достижения фронтом излома обратной тепловой волны поверхности пластины ( $\xi = 1$ ) наблюдается новая (вторая) прямая волна, которая также имеет излом. Причем температура на фронте излома в процессе его движения к центру пластины остается большей температуры как в центре, так и на поверхности. В процессе движения прямых и обратных волн охлаждения пластины температура на ее поверхности может оказаться ниже температуры окружающей среды. С увеличением времени происходит колебательное изменение температуры пластины относительно температуры среды с отклонением в сторону как положительных, так и отрицательных значений. При каких-то больших значениях числа Фурье амплитуда колебаний уменьшается, и при  $Fo \rightarrow \infty$  температура пластины принимает температуру среды.

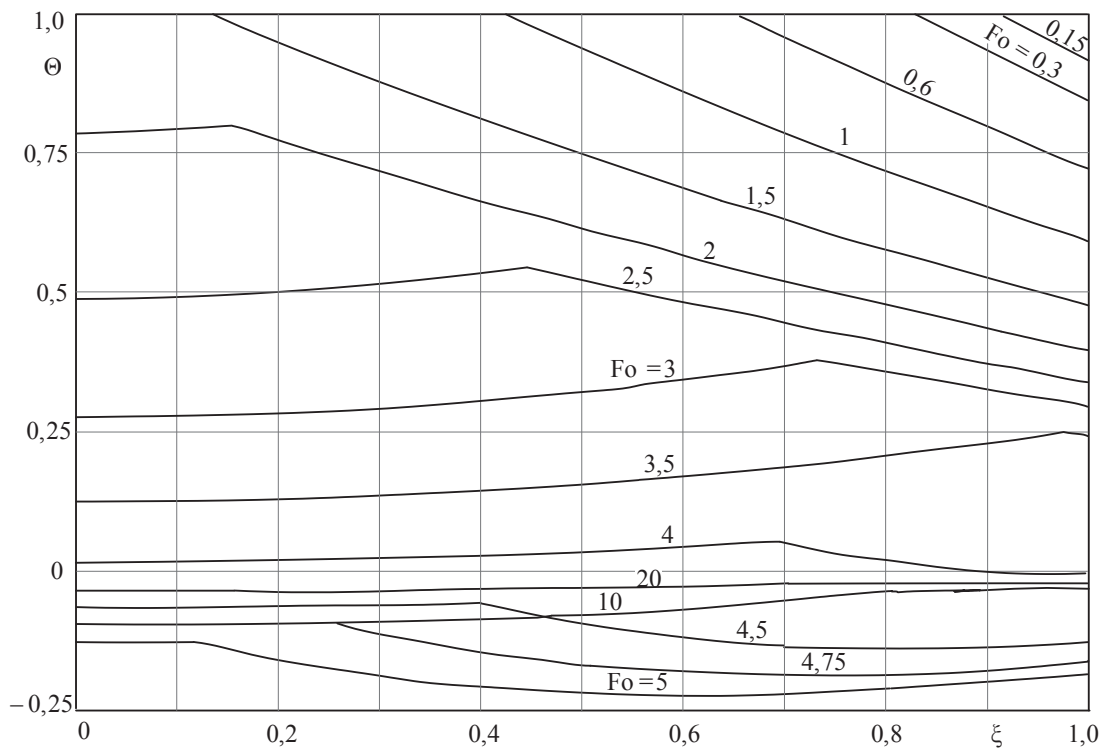


Рис. 1. Изменение температуры:  
 $Bi = 1$ ;  $Fo_r = 3$ ;  $n = 1000$  – число членов ряда (31)

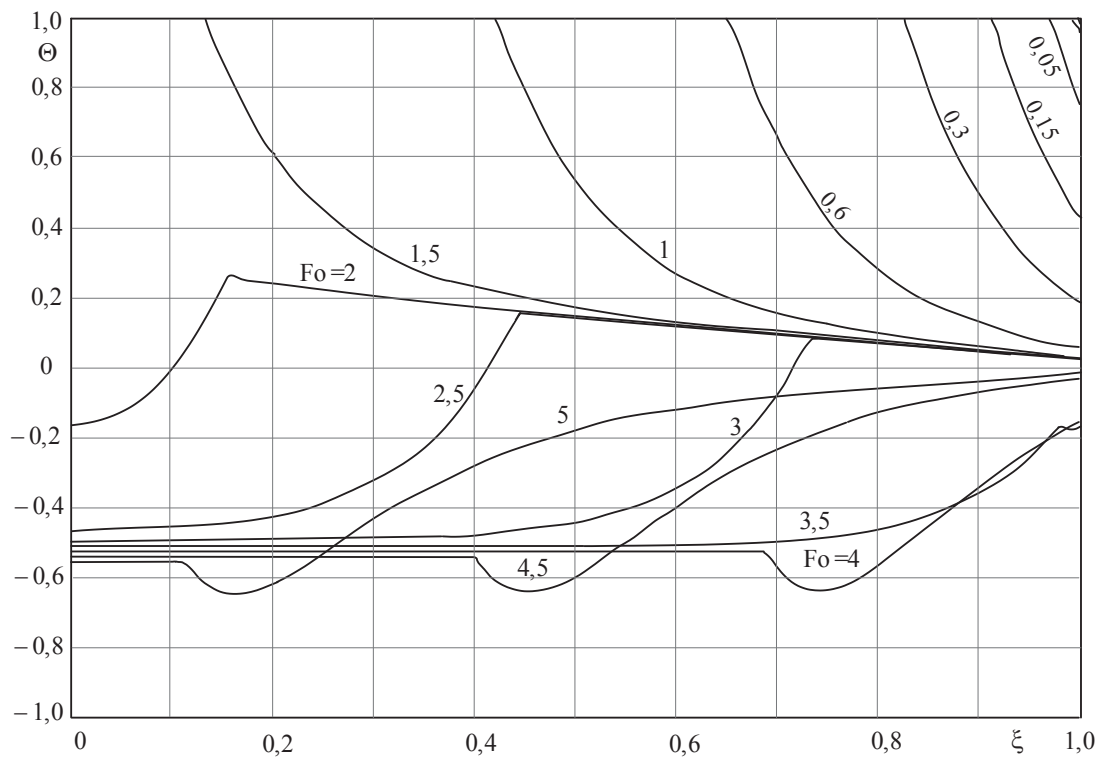


Рис. 2. Распределение температуры:  
 $Bi = 10$ ;  $Fo_r = 3$ ;  $n = 190$  – число членов ряда (31)

С увеличением числа Био угол излома температурных кривых уменьшается и при  $Bi \rightarrow \infty$  становится равным  $90^\circ$ , то есть излом температурных кривых переходит в скачок температуры, имеющий место как на прямых, так и на обратных температурных волнах. Распределение температуры в данном случае полностью совпадает с решением аналогичной задачи при граничных условиях первого рода [1, 2] (рис. 3).

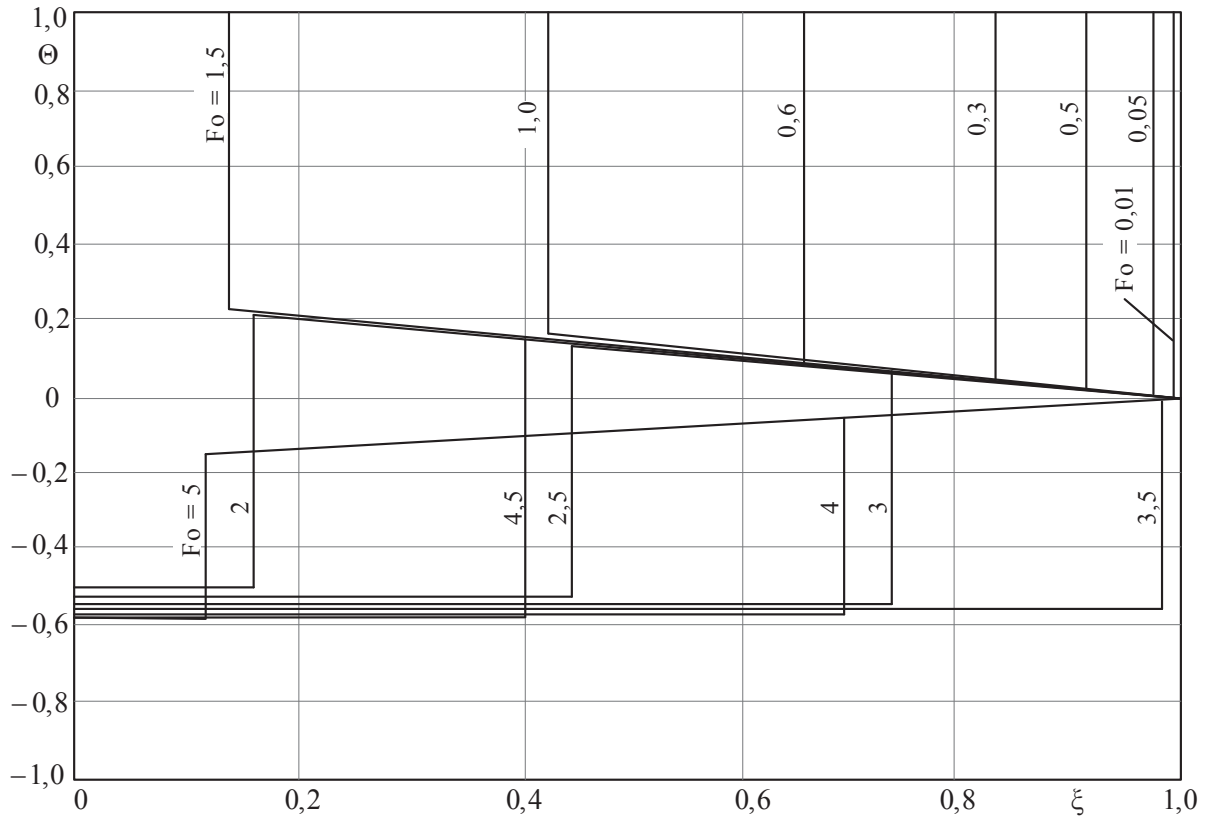


Рис. 3. Изменение температуры:  
 $Bi = 10^6$ ;  $Fo_r = 3$ ;  $n = 1000$  – число членов ряда (31)

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Об одном методе получения точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности на основе использования ортогональных методов // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. – 2010. – № 5 (21). – С. 159–169.
2. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Получение и анализ точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности для плоской стенки // Теплофизика высоких температур. – 2012. – Т. 50. – № 1. – С. 118–125.
3. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Исследование теплопроводности с учетом конечной скорости распространения теплоты // Теплофизика высоких температур. – 2013. – Т. 51. – № 2. – С. 301–310.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
5. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений теплопереноса: Учеб. пособие / Под ред. Э.М. Карташова. – М.: ИНФРА-М, 2013. – 391 с. (Высшее образование: Бакалавриат).



6. Кузнецова А.Э. Разработка численно-аналитических методов решения задач тепломассопереноса и термоупругости для однослойных и многослойных тел: Дисс. ... канд. техн. наук. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2014.

*Статья поступила в редакцию 19 августа 2016 г.*

## **OBTAINING SOLUTIONS OF HYPERBOLIC HEAT CONDUCTION EQUATIONS WITH BOUNDARY CONDITIONS OF THIRD KIND**

***I.V. Kudinov, L.S. Abisheva, M.P. Skvortsova, G.N. Maksimenko***

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100, Russian Federation

E-mail: totig@yandex.ru

*The exact analytical solution of the hyperbolic heat equation for an infinite plate with symmetric boundary conditions of the third kind. It is shown, that the heating (cooling) of the plate is accompanied by the motion of the front of a thermal wave, and the study area is divided into two subfields : disturbed, where the temperature changes from its values on a wall up to the temperature at the front and undisturbed, all along keeping the initial temperature. Therefore, unlike parabolic heat equation, the speed of propagation of heat in this case turns out to be finite. For large values of the number  $Fo_r$ , on the temperature curves appears from scrap,  $Bi \rightarrow \infty$  goes to the jump of the temperature. This bends-process occurs in the field, both positive and negative temperatures.*

***Keywords:*** hyperbolic equation, the boundary condition of the third kind, the exact analytical solution, a front of a thermal wave, the jump of the temperature, relaxation time, the speed of the wave, heat wave.

---

*Igor V. Kudinov (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.  
Lubov' S. Abisheva, Postgraduate Student.  
Marina P. Skvortsova, Postgraduate Student.  
Galina N. Maksimenko, Postgraduate Student.*