УДК 681.391:543/545

НЕПРЕРЫВНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАДИАЛЬНОГО БАЗИСА

Р.Т. Сайфуллин

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Предложен метод вейвлет-обработки данных аналитических приборов с использованием радиальных базисных функций (РБФ). Вейвлет-преобразование (ВП) осуществляется в два этапа. На первом этапе производят интерполяцию отсчетов исходного дискретизированного сигнала с помощью РБФ. На втором этапе, зная весовые множители базисных функций, аналитическое выражение непрерывного ВП для конкретной базисной функции и вейвлета, на основе свойства линейности ВП восстанавливают непрерывное ВП исходного сигнала.

Ключевые слова: *вейвлет, вейвлет-преобразование, радиальная базисная функция, обработка сигналов аналитических приборов.*

Вейвлет-анализ является одним из наиболее мощных и гибких средств исследования и цифровой обработки сигналов. Наряду с задачами фильтрации и сжатия сигналов анализ в базисе вейвлет-функций позволяет решать задачи идентификации, моделирования, аппроксимации стационарных и нестационарных процессов, исследовать вопросы наличия разрывов в производных и т. д.

Непрерывное вейвлет-преобразование (ВП) сигнала *f(t)* определяется соотношением

$$W_\psi(a,b)f = a^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx, \tag{1}$$

где функция $\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ называется вейвлетом; *a, b* – параметры соответственно масштаба и сдвига. Множитель $a^{-\frac{1}{2}}$ обеспечивает единичную норму для любой функции $\psi_{ab}(x) = a^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

Коэффициенты $W_\psi(a,b)f$ содержат комбинированную информацию как об исследуемом вейвлете, так и об анализируемом сигнале. Каждый вейвлет имеет характерные особенности во временном и частотном пространстве, поэтому с помощью разных вейвлетов можно полнее выявить или подчеркнуть те или иные свойства анализируемого сигнала. Таким образом, вейвлет-анализ сигнала благодаря изменению масштаба вейвлет-функций способен выявить различия в характеристиках сигнала на различных шкалах, а посредством сдвига можно

Раухат Талгатович Сайфуллин (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Информационно-измерительная техника».

проанализировать свойства сигнала в различных точках на всем исследуемом интервале.

В качестве вейвлетов очень часто используются производные функции Гаусса:

$$\psi_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots .$$

При этом наибольшее применение находят гауссовы вейвлеты небольших порядков:

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= -xe^{-\frac{x^2}{2}}; \\
\psi_2(x) &= (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}; \\
\psi_3(x) &= (x^3-3x)e^{-\frac{x^2}{2}}; \\
\psi_4(x) &= (-x^4+6x^2-3)e^{-\frac{x^2}{2}}; \\
\psi_5(x) &= (-x^5+10x^2-15x)e^{-\frac{x^2}{2}}; \\
\psi_6(x) &= (-6x^6+15x^4-45x^2+15)e^{-\frac{x^2}{2}}; \\
\psi_7(x) &= (-x^7+21x^5-105x^3+105x)e^{-\frac{x^2}{2}}; \\
\psi_8(x) &= (-x^8+28x^6-210x^4+420x^2-105)e^{-\frac{x^2}{2}}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Присутствие экспоненциального множителя в вейвлетах обеспечивает их локальность. Из определения гауссовых вейвлетов следует, что производная от вейвлета $\psi_n(x)$ совпадает (с точностью до знака) с вейвлетом $\psi_{n+1}(x)$:

$$\frac{d\psi_n(x)}{dx} = -\psi_{n+1}(x).$$

Численная реализация непрерывного ВП сигналов аналитических приборов во временной области на основе выражения (1) рассмотрена в работе [2]. В данной работе с целью расширения функциональных возможностей вейвлет-обработки сигналов для реализации непрерывного ВП предлагается использовать радиальный базис. При этом вейвлет-преобразование осуществляется в два этапа.

На первом этапе производится интерполяция отсчетов исходного дискретизированного сигнала с помощью выбранных радиально-базисных функций [3]. В результате получают разложение исходного сигнала в виде взвешенной суммы базисных функций.

На втором этапе, зная весовые множители базисных функций, полученные на первом этапе, и аналитическое выражение непрерывного ВП для конкретных базисных функций и вейвлета, используя свойство линейности вейвлет-преобразования, восстанавливают ВП исходного сигнала. Таким образом, по коэффициентам разложения исходного сигнала в выбранной системе базисных функций можно достаточно просто восстановить вейвлет-преобразование этого сигнала. Для этого достаточно заранее получить аналитические выражения непрерывного ВП выбранной базисной функции и интересующих вейвлетов.

Рассмотрим более подробно каждый этап.

Этап I. Интерполяция с помощью радиально-базисных функций. Для выходного сигнала аналитического прибора дискретизированные отсчеты представляются рядом участков, каждый длиной *n*. Внутри участков используются локальные координаты. Для каждого из участков находится интерполяция отсчетов исходного сигнала непрерывной функцией вида

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\frac{(x-x_i)^2}{2\beta^2}}, \tag{3}$$

где β – параметр ширины РБФ-функций; p_i – неизвестные коэффициенты (веса). Элементам суммы соответствуют центры РБФ-функций в точках x_i.

Для каждого участка получают систему из *n* линейных уравнений (число неизвестных p_i также равно *n*):

$$\sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{(x_j-x_i)^2}{2\beta^2}} \cdot p_i = f(x_j),\ j=\overline{1,n}$$

или в матричном виде:

$$E \cdot P = F, \tag{4}$$

где матрица E состоит из элементов $e^{-\frac{(x_j-x_i)^2}{2\beta^2}}$ со столбцами $i=\overline{1,n}$ и строками $j=\overline{1,n}$. Если Δ – интервал равномерной дискретизации сигнала, то матрица E будет иметь вид

$$E=\begin{pmatrix} 1 & e^{-\frac{\Delta^2}{2\beta^2}} & \dots & e^{-\frac{(n\Delta)^2}{2\beta^2}} \\ e^{-\frac{\Delta^2}{2\beta^2}} & 1 & \dots & e^{-\frac{[(n-1)\Delta]^2}{2\beta^2}} \\ \ddots & \ddots & \dots & \ddots \\ e^{-\frac{(n\Delta)^2}{2\beta^2}} & e^{-\frac{[(n-1)\Delta]^2}{2\beta^2}} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор $P=\left(p_1, p_2, \dots p_n\right)^T$, вектор $F=\left(f(x_1), f(x_2), \dots f(x_n)\right)^T$, T – знак транспонирования. Длина участка *n* и параметр ширины β РБФ функций подбираются экспериментально.

Полученная система уравнений (4) из-за плохой обусловленности матрицы E не всегда может иметь решение

$$P=E^{-1}\cdot F.$$

В этом случае необходимо применять методы регуляризации – например, использовать расчет псевдообратной матрицы $P=E^{+}\cdot F$ (E^{+} – псевдообратная матрица) либо регуляризацию по А.Н. Тихонову [4]. В результате исходный дискретизированный сигнал может быть представлен соотношением (3).

Аналитическое вычисление непрерывного ВП базисной функции. Пусть используется гауссова базисная функция $s(x) = pe^{-\frac{(x-x_i)^2}{2\beta^2}}$ с параметрами веса p и ширины β. Вейвлет-образ этой базисной функции при использовании гауссовых вейвлетов (2) может быть вычислен аналитически и представлен в виде [5]

$$W_{\psi_n}(a,b)s = \frac{p\sqrt{\pi}\,\beta a^{(n+1)}}{\tau^{n+1}}\psi_n(z),$$

где $z = \frac{x_i - b}{\tau}$, $\tau = \sqrt{a^2 + \beta^2}$.

Например, формулы вейвлет-коэффициентов второго и четвертого порядков имеют вид:

$$W_{\psi_2}(a,b)s = \frac{\sqrt{\pi}\,p\beta a^3}{\tau^3}\left[1 - \frac{(x_i - b)^2}{\tau^2}\right]e^{-\frac{(x_i-b)^2}{2\tau^2}}; \tag{5}$$

$$W_{\psi_4}(a,b)s = \frac{\sqrt{\pi}\,p\beta a^5}{\tau^5}\left[6\left(\frac{x_i - b}{\tau}\right)^2 - \left(\frac{x_i - b}{\tau}\right)^4 - 3\right]e^{-\frac{(x_i-b)^2}{2\tau^2}}. \tag{6}$$

Этап 2. Восстановление непрерывного ВП сигнала. Пусть требуется произвести вейвлет-преобразование сигнала с использованием гауссового вейвлета второго и четвертого порядков. В каждой точке x_i дискретизированного сигнала известен весовой множитель p_i базисной функции (получен на первом этапе). Для конкретной базисной функции и вейвлета имеем аналитическое выражение для непрерывного ВП. Для гауссовой базисной функции и гауссового вейвлета второго и четвертого порядков это соотношения (5) и (6). Используя свойство линейности ВП, записываем требуемые непрерывные ВП для исходного сигнала, представленного в виде (4):

$$W_{\psi_2}(a,b)f = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\sqrt{\pi}\,\beta a^3}{\tau^3}\left[1 - \frac{(x_i - b)^2}{\tau^2}\right]e^{-\frac{(x_i-b)^2}{2\tau^2}};$$

$$W_{\psi_4}(a,b)f = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\sqrt{\pi}\,\beta a^5}{\tau^5}\left[6\left(\frac{x_i - b}{\tau}\right)^2 - \left(\frac{x_i - b}{\tau}\right)^4 - 3\right]e^{-\frac{(x_i-b)^2}{2\tau^2}}.$$

Таким образом, благодаря использованию заранее полученных аналитических формул для непрерывного вейвлет-преобразования базисных функций и вейвлетов удается построить быстрые вычислительные алгоритмы вейвлет-обработки, что в сочетании с их высокой эффективностью является значительным достоинством метода.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Малашкевич И.А.* Вейвлет-анализ сигналов. Теория и практика. – Йошкар-Ола: МарГТУ, 2008. – 224 с.
2. *Сайфуллин Р.Т., Наумов А.А.* Численная реализация непрерывного вейвлет-преообразования во временной и частотных областях // Информационно-измерительные и управляющие системы: сб. науч. статей.– Самара: Самар. гос. тех. ун-т, 2016. – Вып. 2(14). – С. 90–95.
3. *Акимов А.В., Дрюченко М.А., Сирота А.А.* Модели и алгоритмы внесения деформирующих искажений на изображениях с использованием радиально-базисных функций // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2014. – № 1. – С. 130–137.
4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
5. *Сайфуллин Р.Т., Наумов А.А.* Обработка выходных сигналов аналитических приборов на основе вейвлет-преобразования // Информационно-измерительные и управляющие системы: Сб. науч. статей. – Самара: Самар. гос. тех. ун-т, 2015. – Вып. 1 (11). – С. 108–113.

Статья поступила в редакцию 1 апреля 2016 г.

CONTINUOUS WAVELET SIGNALS TRANSFORMING IN ANALYTICAL INSTRUMENTS WITH RADIAL BASIS USING

R.T. Saifullin

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, Russia, 443100, Russian Federation

In this paper we propose a method of wavelet data processing in analytical instruments by radial basis function (RBF) using. The wavelet transform (VT) is carried out in two stages. On the first stage the interpolation of the initial signal samples by RBF using is carried. On the second stage is reduced continuously VT of the original signal with using of the linearity property of the wavelet transform and with knowing of the weight coefficients of the basis functions, the analytical expression for a continual VT and wavelet basis function.

Keywords: *wavelet, wavelet transform, radial basis function, data acquisition in the analytical instrumentation.*

Rauhat T. Saifullin (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.