

УДК 536.2 (075)

**ПОЛУЧЕНИЕ ТОЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ВО ВРЕМЕНИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ\*****И.В. Кудинов**Самарский государственный технический университет  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: totig@yandex.ru

*На основе использования дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий в интегральном методе теплового баланса получено точное аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для бесконечной пластины с переменным во времени граничным условием первого рода. Использование зависящей от времени дополнительной искомой функции основывается на описываемой параболическим уравнением теплопроводности бесконечной скорости распространения теплоты, согласно которой температура в любой точке пластины начинает изменяться сразу после приложения граничного условия первого рода на ее поверхности. Используемые при получении решения дополнительные граничные условия находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению дифференциального уравнения краевой задачи в граничных точках. Показано, что выполнение уравнения в граничных точках приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области. Выполнение интеграла теплового баланса, то есть осредненного в пределах толщины пластины исходного дифференциального уравнения, позволяет свести решение уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной искомой функции. Отсутствие необходимости интегрирования исходного дифференциального уравнения по пространственной переменной, ограничиваясь лишь выполнением интеграла теплового баланса, позволяет применять данный метод к задачам, включающим сложные дифференциальные уравнения (нелинейные, с переменными физическими свойствами и др.), получение точных решений которых с помощью классических аналитических методов не представляется возможным.*

**Ключевые слова:** нестационарная теплопроводность, бесконечная пластина, переменные во времени граничные условия, точное аналитическое решение, бесконечная скорость распространения теплоты, интегральный метод теплового баланса, дополнительные граничные условия, дополнительная искомая функция.

В аналитической теории теплопроводности известны методы, основанные на определении глубины термического (прогретого) слоя, которые объединены под общим названием «интегральные методы теплового баланса» [1–12]. Их использование оказалось эффективным при решении ряда краевых задач, не допускающих получение точных аналитических решений классическими методами. Однако основной проблемой является низкая точность. Согласно этим методам

---

\*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-38-00059 мол\_а.

Игорь Васильевич Кудинов (к.т.н.), доцент кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика».

процесс теплопроводности разделяется на две стадии по времени, первая из которых характеризуется постепенным продвижением фронта температурного возмущения от поверхности тела к его центру. Дополнительной искомой функцией здесь является зависящая от времени глубина прогретого слоя (величина фронта температурного возмущения). Во второй стадии изменение температуры происходит по всей толщине тела, и в рассмотрение вводится дополнительная искомая функция, характеризующая изменение температуры во времени в центре пластины.

Особенностью данной группы методов является противоречие, связанное с допущением о конечной скорости распространения теплоты, несмотря на то, что решению подлежит параболическое уравнение теплопроводности, характеризующее бесконечную ее скорость. Однако результаты многочисленных исследований, приведенные в работах [1, 10–12], показали, что с увеличением числа приближений ( $n$ ) первой стадии процесса время ( $Fo_1$ ) достижения фронтом температурного возмущения центра пластины уменьшается и в пределе при  $n \rightarrow \infty$   $Fo_1 \rightarrow 0$ . Следовательно, с увеличением числа приближений получаемое решение приближается к описанию процесса, протекающего с бесконечной скоростью распространения теплоты, и таким образом снимается указанное выше противоречие.

Следует отметить, что с увеличением числа приближений диапазон времени первой стадии процесса уменьшается, а второй – возрастает. Следовательно, роль второй стадии в определении температурного состояния возрастает. В связи с этим в настоящей работе рассматривается метод получения точного аналитического решения, позволяющий избежать использования первой стадии процесса в интегральном методе теплового баланса. Основные его положения рассмотрим на примере решения нестационарной задачи теплопроводности для бесконечной пластины с переменными во времени граничными условиями первого рода (температура стенки – линейная функция времени) в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (\tau > 0; \quad 0 < x < \delta); \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T_0; \quad (2)$$

$$\partial T(0, \tau) / \partial x = 0; \quad (3)$$

$$T(l, \tau) = T_0 + l \tau, \quad (4)$$

где  $T$  – температура, К ;

$x$  – координата, м ;

$\tau$  – время, с ;

$T_0$  – начальная температура, К ;

$a$  – коэффициент теплопроводности,  $m^2/c$  ;

$l = dT(l, \tau) / d\tau = const$  – скорость нагревания стенки, К/с ;

$\delta$  – половина толщины пластины, м .

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\Theta = (T - T_0) / T_0 ; \quad Fo = a\tau / \delta^2 ; \quad \xi = x / \delta ; \quad B = l\delta^2 / (aT_0), \quad (5)$$

где  $\Theta$  – безразмерная температура;

$Fo = a\tau / \delta^2$  – число Фурье;

$\xi$  – безразмерная координата;

$B = const$  – безразмерный комплекс.

Задача (1)–(4) с учетом (5) примет вид

$$\partial\Theta(\xi, Fo)/\partial Fo = \partial^2\Theta(\xi, Fo)/\partial\xi^2 ; (Fo > 0; 0 < \xi < 1); \quad (6)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad (7)$$

$$\partial\Theta(0, Fo)/\partial\xi = 0; \quad (8)$$

$$\Theta(1, Fo) = BFo, \quad (9)$$

где  $B = d\Theta(1, Fo)/dFo = const$  – безразмерная скорость нагревания стенки.

С целью упрощения процесса получения аналитического решения введем дополнительную искомую функцию

$$q(Fo) = \Theta(0, Fo), \quad (10)$$

представляющую изменение температуры во времени в центре пластины. Ввиду бесконечной скорости распространения теплоты, описываемой уравнением (6), температура в центре пластины начинает изменяться сразу после приложения граничного условия первого рода на ее поверхности. В связи с этим диапазон временного изменения функции  $q(Fo)$  охватывает весь диапазон времени нестационарного процесса ( $0 < Fo < \infty$ ).

Решение задачи (6)–(9) принимается в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = B[Fo - (1/2)(1 - \xi^2) + \sum_{k=1}^n b_k(q)\varphi_k(\xi)], \quad (11)$$

где  $b_k(q)$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) – неизвестные коэффициенты;

$\varphi_k(\xi) = \cos(r\pi\xi/2)$ , ( $r = 2k - 1$ ) – координатные функции.

Очевидно, что благодаря принятой системе координатных функций соотношение (11) в любом приближении точно удовлетворяет граничным условиям (8), (9). Неизвестные коэффициенты  $b_k(q)$  будем находить из условия (10) и некоторых дополнительных граничных условий, определяемых так, чтобы их выполнение соотношением (11) было эквивалентно выполнению уравнения (7) в граничных точках  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ . Отметим, что методы решения краевых задач путем выполнения уравнения на границах области рассматривались в работах [13–15].

Для получения дополнительных граничных условий, выполняемых в точках  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ , продифференцируем условия (8), (9) по переменной  $Fo$ :

$$\frac{\partial}{\partial\xi} \left( \frac{\partial\Theta(0, Fo)}{\partial Fo} \right) = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial\Theta(1, Fo)}{\partial Fo} = B. \quad (13)$$

Соотношения (12) и (13) с учетом уравнения (6) приводятся к следующим дополнительным граничным условиям:

$$\partial^3\Theta(0, Fo)/\partial\xi^3 = 0; \quad (14)$$

$$\partial^2\Theta(1, Fo)/\partial\xi^2 = B. \quad (15)$$

Продифференцируем соотношения (14), (15) по переменной  $Fo$ :

$$\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \left( \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} \right) = 0 ; \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial Fo} \right) = 0 . \quad (17)$$

Подставляя правую часть уравнения (6) в соотношения (16), (17), получаем дополнительные граничные условия вида

$$\partial^5 \Theta(0, Fo) / \partial \xi^5 = 0 ; \quad (18)$$

$$\partial^4 \Theta(1, Fo) / \partial \xi^4 = 0 . \quad (19)$$

Аналогично получают и последующие дополнительные граничные условия:

$$\partial^7 \Theta(0, Fo) / \partial \xi^7 = 0 ; \quad (20)$$

$$\partial^6 \Theta(1, Fo) / \partial \xi^6 = 0 . \quad (21)$$

Общие формулы для них будут

$$\partial^i \Theta(0, Fo) / \partial \xi^i = 0 \quad (i = 3, 5, 7, \dots) ; \quad (22)$$

$$\partial^i \Theta(1, Fo) / \partial \xi^i = 0 \quad (i = 4, 6, 8, \dots) . \quad (23)$$

Соотношение (15) не входит в общую формулу (23), так как с учетом  $B = d\Theta(1, Fo) / dFo$  оно, по сути, представляет математическую запись уравнения (6), которое в данной точке будет выполнено полученным решением в любом приближении.

Решение (11) благодаря принятой системе координатных функций в любом приближении точно удовлетворяет дополнительным граничным условиям (22), (23). Отметим, что для краевых задач с более сложными дифференциальными операторами (нелинейных, с переменными коэффициентами и др.) дополнительные граничные условия могут иметь более сложный вид, и в случае, когда они не будут заранее выполняться искомым решением, их необходимо выполнять за счет определения неизвестных коэффициентов  $b_k(q)$ , ( $k = \overline{1, n}$ ).

В данном случае неизвестные коэффициенты  $b_k(q)$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) решения (11) будем находить из соотношения (10) и получаемых на его основе дополнительных граничных условий. Для нахождения первого из них продифференцируем соотношение (10) по переменной  $Fo$ :

$$dq(Fo) / dFo = d\Theta(0, Fo) / \partial Fo . \quad (24)$$

Сравнивая соотношение (24) с уравнением (6), получаем дополнительное граничное условие вида

$$\partial^2 \Theta(0, Fo) / \partial \xi^2 = dq(Fo) / dFo . \quad (25)$$

Дифференцируя (25) по переменной  $Fo$ , находим

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} \right) = \frac{d^2 q(Fo)}{dFo^2} . \quad (26)$$

Соотношение (26) с учетом уравнения (6) приводится к следующему дополнительному граничному условию:

$$\partial^4 \Theta(0, Fo) / \partial \xi^4 = d^2 q(Fo) / dFo^2. \quad (27)$$

С учетом (25), (27) можно записать общую формулу для этих условий:

$$\partial^{2i} \Theta(0, Fo) / \partial \xi^{2i} = d^i q(Fo) / dFo^i \quad (i=1, 2, 3, \dots). \quad (28)$$

Таким образом, из основных (8), (9) и дополнительных граничных условий (10), (22), (23), (28) невыполненными решением (11) остаются лишь условия (10) и (28), которые и будут использованы далее при определении неизвестных коэффициентов  $b_k(q)$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) решения (11).

Найдем решение задачи (6)–(9) в первом приближении. Подставляя (11) (ограничиваясь одним членом ряда) в соотношение (10), для определения неизвестного коэффициента  $b_1(q)$  будем иметь алгебраическое линейное уравнение, из решения которого находим  $b_1(q) = q(Fo) - B Fo$ . Соотношение (11) с учетом найденного значения  $b_1(q)$  принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = B [Fo - (1/2)((1 - \xi^2) + (2Fo - 1 + 2q/B) \cos(\pi\xi/2))]. \quad (29)$$

Потребуем, чтобы соотношение (29) удовлетворяло осредненному в пределах толщины пластины уравнению (6) – интегралу теплового баланса:

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^1 \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} d\xi. \quad (30)$$

Подставляя (29) в (30), после определения интегралов относительно функции  $q(Fo)$  будем иметь обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$8dq/dFo - 2\pi^2 q = B(8 + \pi^2(2Fo - 1)). \quad (31)$$

Интегрируя уравнение (31), находим

$$q(Fo) = B(Fo - (1/2)) + C_1 \exp(-\pi^2 Fo/4), \quad (32)$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования.

Подставляя (32) в (31), получаем

$$\Theta(\xi, Fo) = B \left( Fo - \frac{1}{2}(1 - \xi^2) + \frac{C_1}{B} \exp\left(-\frac{\pi^2 Fo}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \right). \quad (33)$$

Для определения постоянной интегрирования  $C_1$  составим невязку начального условия (7) и потребуем ортогональности невязки к координатной функции  $\varphi_1(\xi) = \cos(\pi\xi/2)$ :

$$\int_0^1 \Theta(\xi, 0) \cos(\pi\xi/2) d\xi = 0. \quad (34)$$

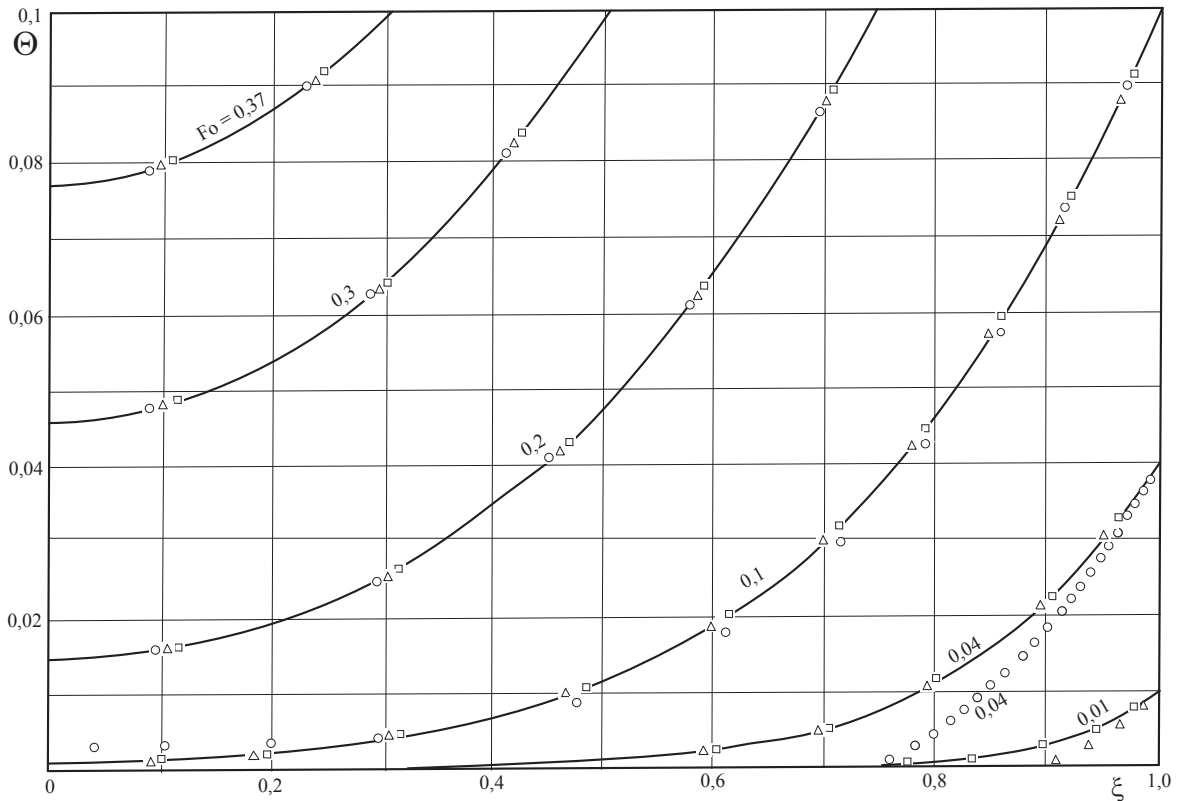
Подставляя (33) в (34), относительно постоянной интегрирования  $C_1$  будем иметь алгебраическое линейное уравнение, из решения которого находим  $C_1 = 16B/\pi^3$ .

Соотношение (33) с учетом найденного значения постоянной интегрирования  $C_1$  принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = B \left( Fo - \frac{1}{2}(1 - \xi^2) + \frac{16}{\pi^3} \exp\left(-\frac{\pi^2 Fo}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \right). \quad (35)$$

Соотношение (35) представляет решение задачи (6)–(9) в первом приближе-

нии. Оно точно удовлетворяет уравнению (6) и граничным условиям (8), (9) и приближенно – начальному условию (7). Результаты расчетов по формуле (35) в сравнении с точным решением [16] приведены на рисунке. Их анализ позволяет заключить, что в диапазоне  $0,1 \leq Fo < \infty$  расхождение не превышает 0,08 %.



Распределение температуры в пластине:

- – первое приближение (по формуле (35)); Δ – второе приближение (по формуле (42));
- ◻ – третье приближение (по формуле (48)); ————— – точное решение

Для получения решения во втором приближении подставим (11) (ограничиваясь двумя членами ряда) в условия (10) и (28) (при  $i = 1$ ). Отсюда для определения неизвестных коэффициентов  $b_k(q)$ , ( $k = 1, 2$ ) получаем систему двух алгебраических линейных уравнений, из решения которой находим

$$b_1(q) = \frac{1}{16\pi^2 B} (8q' + 18\pi^2 q - B\eta_1); \quad b_2(q) = -\frac{1}{\pi^2 B} (8q' + 2\pi^2 q - B\eta_2), \quad (36)$$

где  $\eta_1 = 8 + 9\pi^2(2Fo - 1)$ ;  $\eta_2 = 8 + \pi^2(2Fo - 1)$ ;  $q' = dq(Fo)/dFo$ .

Соотношение (11) с учетом соотношений (36) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = B[Fo - (1/2)(1 - \xi^2) + \eta_3(8q' + 18\pi^2 q - B\eta_1) \times \\ \times \cos(\pi\xi/2) - \eta_4(8q' + 2\pi^2 q - B\eta_2) \cos(3\pi\xi/2)], \quad (37)$$

где  $\eta_3 = 1/(16\pi^2 B)$ ;  $\eta_4 = 1/(\pi^2 B)$ .

Подставляя (37) в (30), относительно неизвестной функции  $q(Fo)$  будем иметь следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$32q'' + 80\pi^2 q' + 18\pi^4 q - B\pi^2(80 + 9\pi^2(2Fo - 1)) = 0, \quad (38)$$

где  $q'' = d^2q(\text{Fo})/d\text{Fo}^2$ .

Интегрируя уравнение (38), находим

$$q(\text{Fo}) = B(\text{Fo} - 1/2) + C_1 \exp(-\pi^2\text{Fo}/4) + C_2 \exp(-9\pi^2\text{Fo}/4), \quad (39)$$

где  $C_1, C_2$  – константы интегрирования.

Подставляя (39) в (37) и составляя невязку начального условия (7), получаем

$$\Theta(\xi, 0) = (1/2)B(\xi^2 - 1) + C_1 \cos(\pi\xi/2) + C_2 \cos(3\pi\xi/2) = 0. \quad (40)$$

Требую ортогональности невязки (40) к координатным функциям  $\varphi_1(\xi)$  и  $\varphi_2(\xi)$ , относительно постоянных  $C_1$  и  $C_2$  будем иметь систему двух алгебраических линейных уравнений:

$$\int_0^1 \Theta(\xi, 0) \cos(j\pi\xi/2) d\xi = 0 \quad (j=1, 3). \quad (41)$$

Ввиду ортогональности косинусов неизвестные  $C_1$  и  $C_2$  в системе уравнений (41) разделяются (в каждое уравнение входит лишь одно неизвестное). Из решения этих уравнений находим  $C_1 = 16B/\pi^3$ ;  $C_2 = -16B/(27\pi^3)$ .

С учетом (39) и найденных значений  $C_1$  и  $C_2$  соотношение (37) принимает вид

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \frac{B}{54\pi^3} \left( 27\pi^3(2\text{Fo} - 1 + \xi^2) + 864e^{-\frac{\pi^2\text{Fo}}{4}} \times \right. \\ \left. \times \cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) - 32e^{-\frac{9\pi^2\text{Fo}}{4}} \cos\left(\frac{3\pi\xi}{2}\right) \right). \quad (42)$$

Соотношение (42) представляет решение задачи (6)–(9) во втором приближении. Оно точно удовлетворяет уравнению (6) и граничным условиям (8), (9) и приближенно – начальному условию (7). Результаты расчетов по формуле (42) в сравнении с точным решением [16] приведены на рисунке. Их анализ позволяет заключить, что в диапазоне  $0, 1 \leq \text{Fo} < \infty$  отклонение от точного решения уменьшается с 0,08 % (в первом приближении) до 0,03 % – во втором.

Для получения решения в третьем приближении подставим (11) (ограничиваясь тремя членами ряда) в (10), (28) (при  $i = 1, 2$ ). Относительно неизвестных коэффициентов  $b_k(q)$ , ( $k = 1, 2, 3$ ) будем иметь систему трех алгебраических линейных уравнений, из решения которой находим:

$$\begin{aligned} b_1(q) &= -\eta_5(B\eta_6 - 32q'' - 272\pi^2q' - 450\pi^4q); \\ b_2(q) &= \eta_7(B\eta_8 - 32q'' - 208\pi^2q' - 50\pi^4q); \\ b_3(q) &= -\eta_9(B\eta_{10} - 32q'' - 80\pi^2q' - 18\pi^4q), \end{aligned} \quad (43)$$

где  $q' = dq(\text{Fo})/d\text{Fo}$ ;  $q'' = d^2q(\text{Fo})/d\text{Fo}^2$ ;  $\eta_5 = 1/(384\pi^4B)$ ;  $\eta_6 = 225\pi^4(2\text{Fo} - 1) + 272\pi^2$ ;  $\eta_7 = 1/(256\pi^4B)$ ;  $\eta_8 = 25\pi^4(2\text{Fo} - 1) + 208\pi^2$ ;  $\eta_9 = 1/(768\pi^4B)$ ;  $\eta_{10} = 9\pi^4(2\text{Fo} - 1) + 80\pi^2$ .

Подставляя (11) (с учетом найденных значений  $b_k(q)$ , ( $k = 1, 2, 3$ )) в инте-

грал теплового баланса (30), после определения интегралов относительно неизвестной функции  $q(\text{Fo})$  будем иметь следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-128q''' - 1120\pi^2 q'' - 2072\pi^4 q' - 450\pi^6 q + B\pi^4(225\pi^2(2\text{Fo} - 1) + 2072) = 0, \quad (44)$$

где  $q''' = d^3q(\text{Fo})/d\text{Fo}^3$ .

Интегрируя уравнение (44), находим

$$q(\text{Fo}) = B(\text{Fo} - (1/2)) + C_1 \exp(-\pi^2\text{Fo}/4) + C_2 \exp(-9\pi^2\text{Fo}/4) + C_3 \exp(-25\pi^2\text{Fo}/4), \quad (45)$$

где  $C_1, C_2, C_3$  – постоянные интегрирования, определяемые из начального условия (7). Составляя его невязку, получаем

$$\Theta(\xi, 0) = (1/2)B(\xi^2 - 1) + C_1 \cos(\pi\xi/2) + C_2 \cos(3\pi\xi/2) + C_3 \cos(5\pi\xi/2) = 0. \quad (46)$$

Требую ортогональности невязки (46) к координатным функциям  $\varphi_j(\xi)$ , ( $j=1, 3, 5$ ), относительно постоянных  $C_1, C_2, C_3$  будем иметь систему трех алгебраических линейных уравнений:

$$\int_0^1 \Theta(\xi, 0) \cos(j\pi\xi/2) d\xi = 0 \quad (j=1, 3, 5). \quad (47)$$

Ввиду ортогональности косинусов неизвестные  $C_1, C_2, C_3$  в системе уравнений (47) разделяются и находятся в виде  $C_1 = 16B/\pi^3$ ;  $C_2 = -16B/(27\pi^3)$ ;  $C_3 = 16B/(125\pi^3)$ .

С учетом (43), (45) и найденных значений постоянных интегрирования  $C_1, C_2, C_3$  соотношение (11) в третьем приближении принимает вид

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \frac{B}{\pi^3} \left( \pi^3 \left( \text{Fo} - \frac{1}{2}(1 - \xi^2) \right) + 16e^{-\frac{\pi^2\text{Fo}}{4}} \cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) - \frac{16}{27}e^{-\frac{9\pi^2\text{Fo}}{4}} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right) + \frac{16}{125}e^{-\frac{25\pi^2\text{Fo}}{4}} \cos\left(\frac{5\pi}{2}\xi\right) \right). \quad (48)$$

Соотношение (48) точно удовлетворяет уравнению (6) и граничным условиям (8), (9). Начальное условие (7) в данном случае удовлетворяется приближенно (в третьем приближении). Анализ результатов расчетов, приведенных на рисунке, позволяет заключить, что температуры, найденные по формуле (48), в диапазоне  $0, 1 \leq \text{Fo} < \infty$  практически совпадают с точными их значениями [16].

Из анализа формул (35), (42), (48) можно заключить, что появление нового слагаемого в каждом последующем приближении подчиняется определенной закономерности. Поэтому можно записать общую формулу решения для любого числа приближений, которая имеет вид

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = B \left( \text{Fo} - \frac{1}{2}(1 - \xi^2) + \sum_{k=1}^n \frac{4(-1)^{k+1}}{r\pi} e^{-(r\pi/2)^2\text{Fo}} \frac{1}{(r\pi/2)^2} \cos\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right) \right), \quad (49)$$

где  $r = 2k - 1$ .

Исследование решений для последующих приближений показывает, что все



они описываются соотношением (49), которое при  $n \rightarrow \infty$  полностью совпадает с классическим точным аналитическим решением [16].

### Выводы

1. Путем использования дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий в интегральном методе теплового баланса получено точное аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности при переменных во времени граничных условиях первого рода. Введение дополнительной искомой функции, характеризующей изменение во времени температуры в центре пластины, основывается на свойстве параболического уравнения теплопроводности, связанном с бесконечной скоростью распространения теплоты.

2. Дополнительные граничные условия, определяемые с использованием исходного дифференциального уравнения и заданных граничных условий, находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению в граничных точках дифференциального уравнения краевой задачи. Показано, что выполнение уравнения в граничных точках приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области.

3. Отсутствие необходимости непосредственного интегрирования исходного уравнения в частных производных по пространственной переменной, при замене его выполнением интеграла теплового баланса, позволяет свести решение краевой задачи к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной искомой функции. В связи с этим данный метод может быть использован для решения нелинейных краевых задач, задач теплопроводности с переменными физическими свойствами среды, с переменными начальными условиями и других задач.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений теплопереноса. – М.: Инфра-М, 2013. – 391 с.
2. Лыков А.В. Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности // Энергетика и транспорт. – 1970. – № 5. – С. 109–150.
3. Гудмен Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена // Проблемы теплообмена: Сборник научных трудов. – М.: Атомиздат, 1967. – С. 41–96.
4. Био М. Вариационные принципы в теории теплообмена. – М.: Энергия, 1975.
5. Вейник А.И. Приближенный расчет процессов теплопроводности. – М.–Л.: Госэнергоиздат, 1959. – 184 с.
6. Швец М.Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя // Прикладная математика и механика. – 1949. – Т. 13. – № 3.
7. Тимошпольский В.И., Постольник Ю.С., Андрианов Д.Н. Теоретические основы теплофизики и термомеханики в металлургии. – Минск: Белорусская наука, 2005. – 560 с.
8. Глазунов Ю.Т. Вариационные методы. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. – 470 с.
9. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1978. – 328 с.
10. Кудинов В.А., Стефанюк Е.В. Аналитический метод решения задач теплопроводности на основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий // Инженерно-физический журнал. – 2009. – Т. 82. – № 3. – С. 540–558.
11. Стефанюк Е.В., Кудинов В.А. Получение приближенных аналитических решений при рассогласовании начальных и граничных условий в задачах теории теплопроводности // Известия вузов. Математика. – 2010. – № 4. – С. 63–71.
12. Кудинов В.А., Кудинов И.В., Скворцова М.П. Обобщенные функции и дополнительные граничные условия в задачах теплопроводности для многослойных тел // Журнал вычислитель-

- ной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55. – № 4. – С. 129–140.
13. Канторович Л.В. Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных // Доклады АН СССР. – 1934. – Т. 2. – № 9. – С. 532–534.
  14. Фёдоров Ф.М. Граничный метод решения прикладных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 2000. – 220 с.
  15. Кудряшов Л.И., Меньшик Н.Л. Приближенные решения нелинейных задач теплопроводности. – М.: Машиностроение, 1979. – 232 с.
  16. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

*Статья поступила в редакцию 21 октября 2016 г.*

## **OBTAINING EXACT ANALYTICAL DECISIONS OF TASKS HEAT CONDUCTIONS WITH VARIABLES IN TIME BOUNDARY CONDITIONS**

***I.V. Kudinov***

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100, Russian Federation

*On the basis use of additional required function and additional boundary conditions in an integral method of heat balance, the exact analytical decision of the nonstationary task of heat conduction for the infinite plate with a variable boundary condition of the first kind in time is received. Use of time-dependent additional required function is based on the heat conduction of the infinite speed of distribution of warmth described by the parabolic equation according to which temperature in any point of a plate begins to change right after the application of a boundary condition of the first kind on its surface. The additional boundary conditions used when obtaining the solution are found in such look that their execution by the required decision was equivalent to execution of a differential equation of boundary value problem in boundary points. It is shown that execution of the equation in boundary points, leads to its execution and in the considered area. Execution of integral of a heat balance, that is input differential equation, average within thickness of a plate, allows to consolidate the solution of a partial equation to integration of an ordinary differential equation of rather additional required function. Absence of need of integration of the input differential equation on space variable, being restricted only to execution of integral of a heat balance, allows to apply this method to the tasks including difficult differential equations (non-linear, with variable physical properties, etc.) which obtaining exact decisions by means of classical analytical methods isn't possible.*

***Keywords:*** *nonstationary heat conduction, the infinite plate, variables in time boundary conditions, the exact analytical solution, the infinite speed of distribution of warmth, an integral method of a heat balance, additional boundary conditions, additional required function.*